

Reconstruction des trajectoires de particules chargées

Reconstruction des trajectoires de rayonnement γ

Du détecteur à la mesure

Roscoff, 13 - 21 juin 2007

François DIDIERJEAN, IPHC, Strasbourg

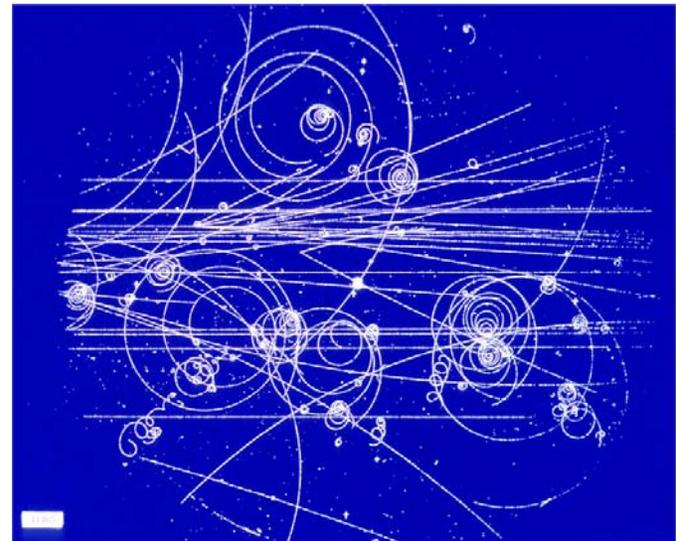
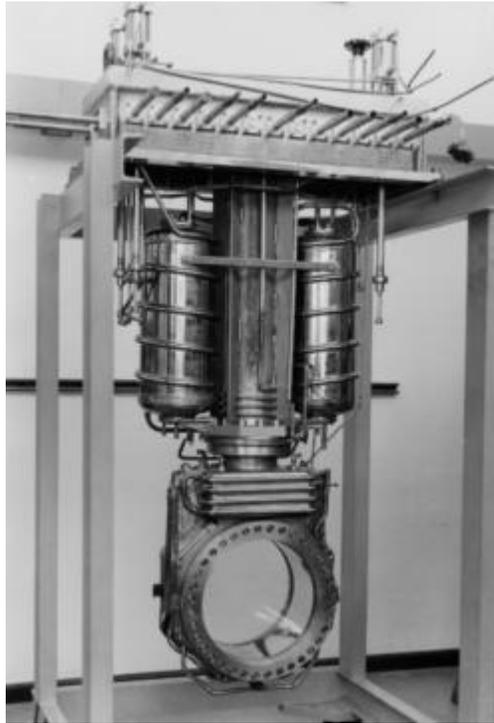


Reconstruction des trajectoires de particules chargées

Plan :

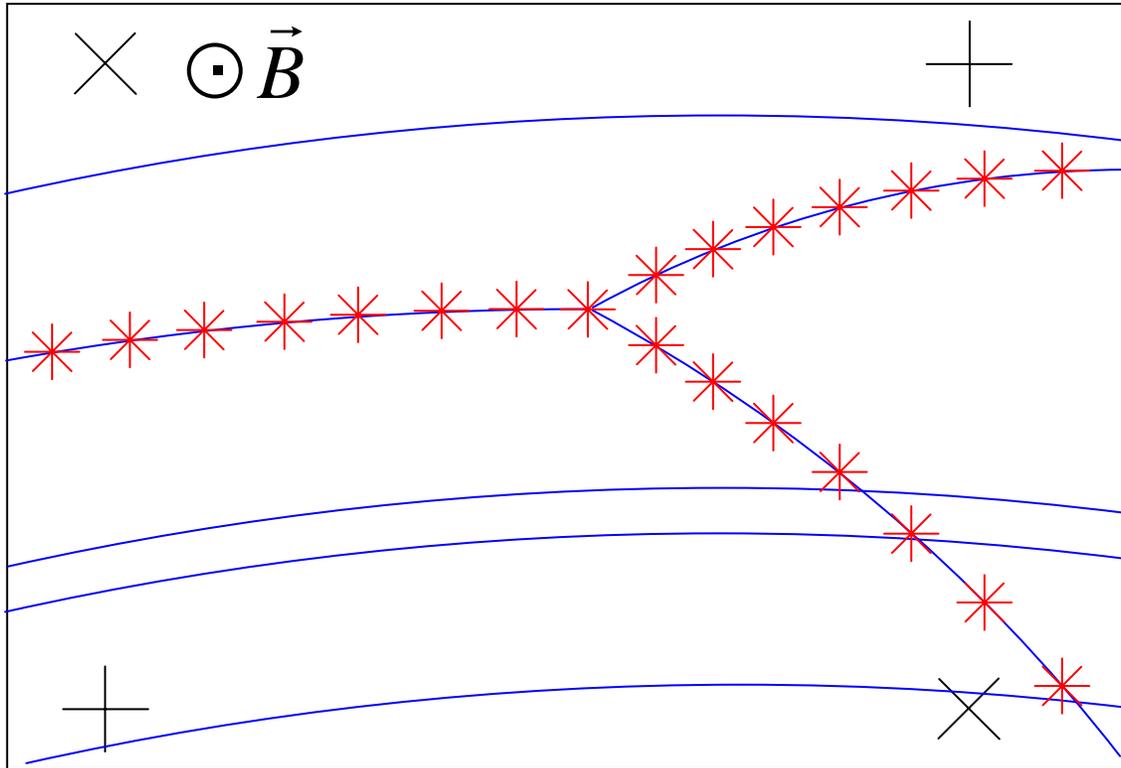
1. Introduction - chambre à bulles
2. Principe
3. Détecteur CMS
4. Méthode de reconstruction - filtre de Kalman
5. Notion de vertexing

1. chambre à bulles



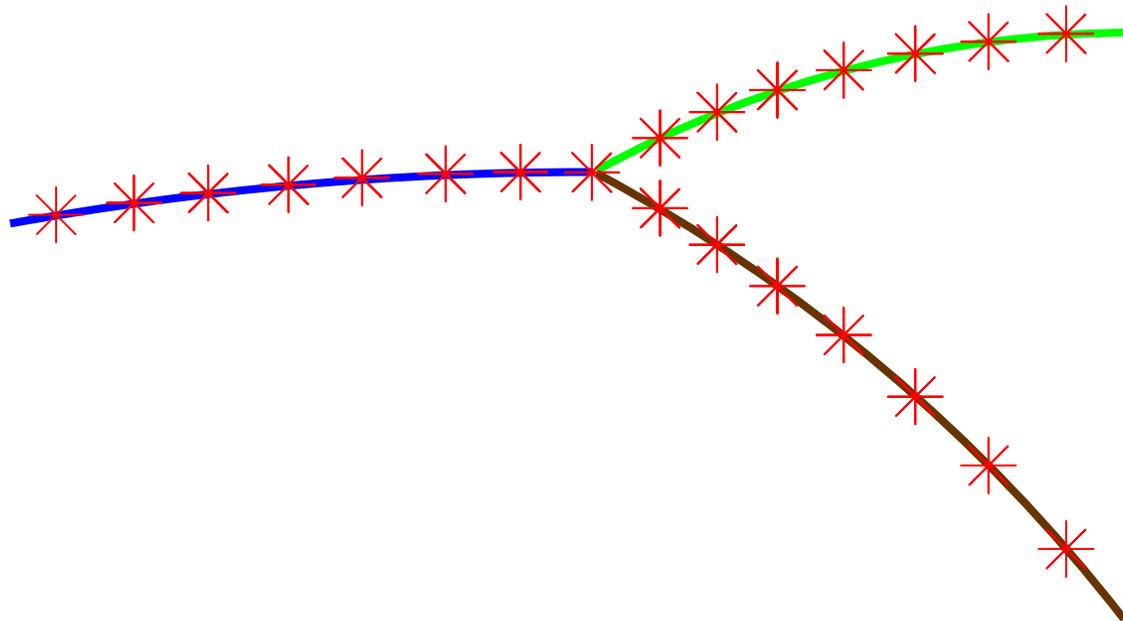
analyse d'un cliché de chambre à bulles

1. cliché d'une des trois vues présentant un événement intéressant



2. digitalisation manuelle sur les 3 vues de l'événement qui nous intéresse

3. à partir des 3 vues : calcul la position des points digitalisés en 3D
4. ajustement des points



⇒ rayon de courbure

5. cinématique

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}$$

$$a = \frac{v^2}{R}$$

$$p = mv = qRB \quad (p[\text{MeV}/c] = 300 \cdot R[\text{m}] \cdot B[\text{T}])$$

avant collision :

$$p_1 = 1960 \text{ MeV}/c$$

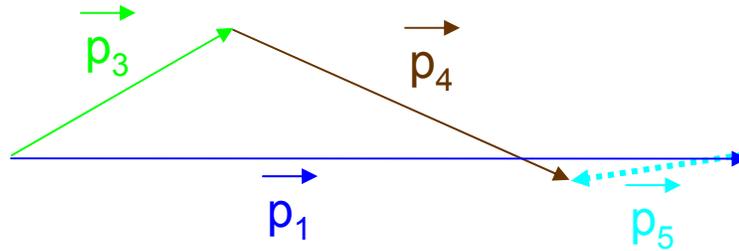
$$p_2 = 0 \text{ MeV}/c$$

après collision :

$$p_3 = 680 \text{ MeV}/c$$

$$p_4 = 980 \text{ MeV}/c$$

conservation de la quantité de mouvement :



introduction d'une nouvelle particule neutre

$$p_5 = 480 \text{ MeV}/c$$

conservation de l'énergie

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$$

$$m_p = 938 \text{ MeV}/c^2$$

avant collision :

$$E_1 = 2173 \text{ MeV}$$

$$E_2 = 938 \text{ MeV}$$

$$E_{\text{tot}} = 3.111 \text{ GeV}$$

6. hypothèses

$$\triangleright p + p \rightarrow p + p + \pi^0 \quad m_{\pi^0} = 135 \text{ MeV}/c^2$$

après collision :

$$E_3 = 1159 \text{ MeV}$$

$$E_{\text{tot}} = 3.015 \text{ GeV}$$

$$E_4 = 1357 \text{ MeV}$$

$$\Delta E = 96 \text{ MeV}$$

$$E_5 = 499 \text{ MeV}$$

$$\triangleright p + p \rightarrow \pi^+ + p + n \quad m_n = 938 \text{ MeV}/c^2$$
$$m_{\pi^+} = 140 \text{ MeV}/c^2$$

après collision :

$$E_3 = 694 \text{ MeV}$$

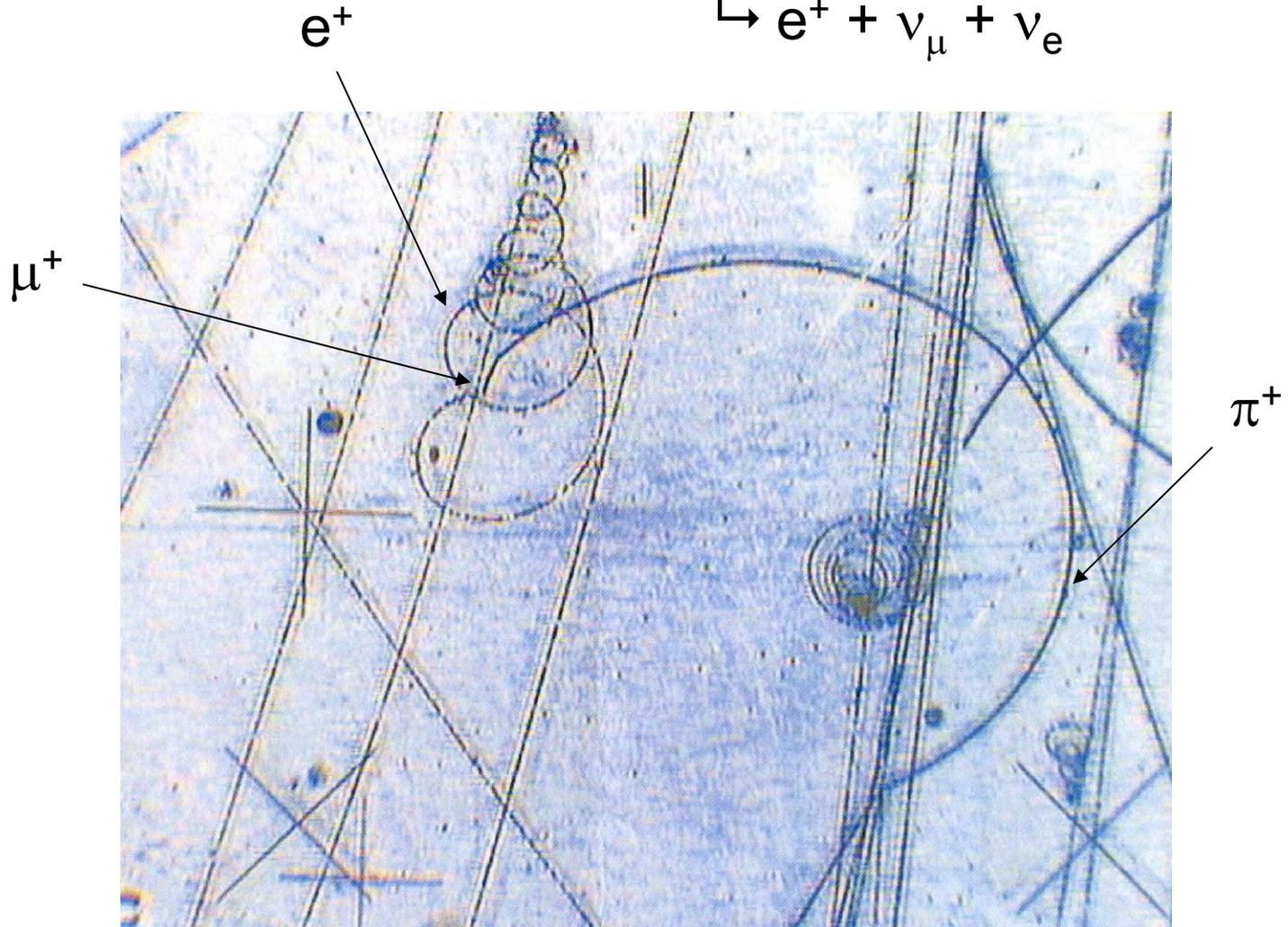
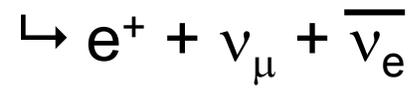
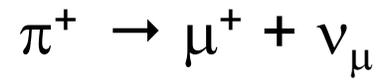
$$E_{\text{tot}} = 3.106 \text{ GeV}$$

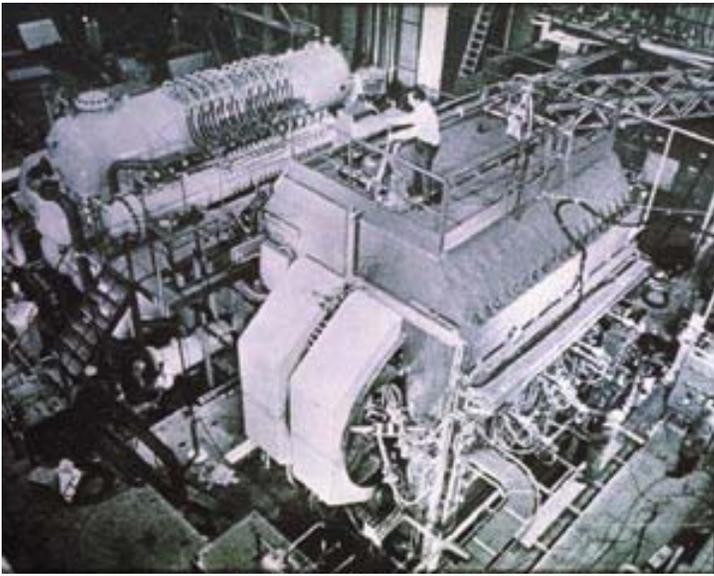
$$E_4 = 1357 \text{ MeV}$$

$$\Delta E = 5 \text{ MeV}$$

$$E_5 = 1055 \text{ MeV}$$

exemples de clichés de chambre à bulles

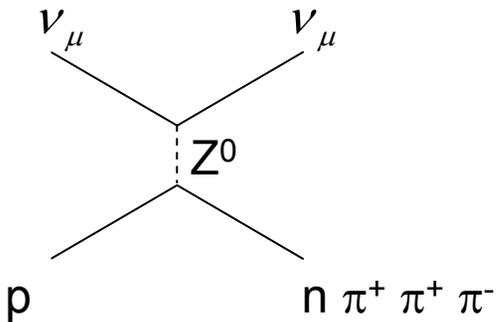




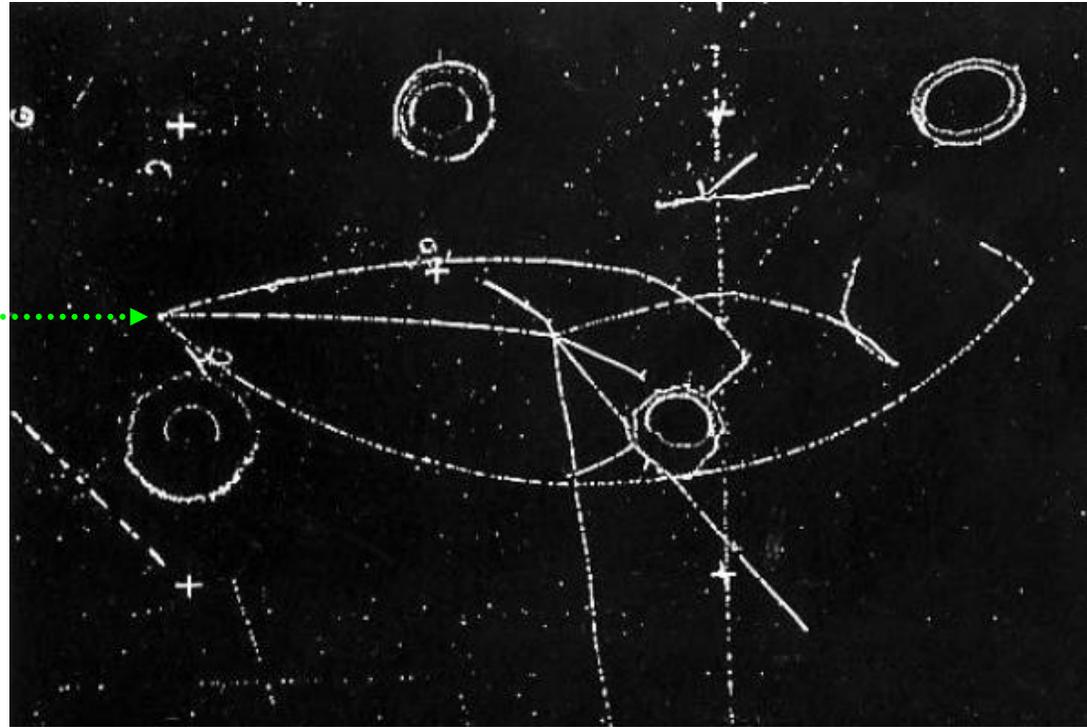
gargamelle - CERN

Première observation des courants neutres :

$$\nu_{\mu} + N \rightarrow \nu_{\mu} + \text{hadrons}$$

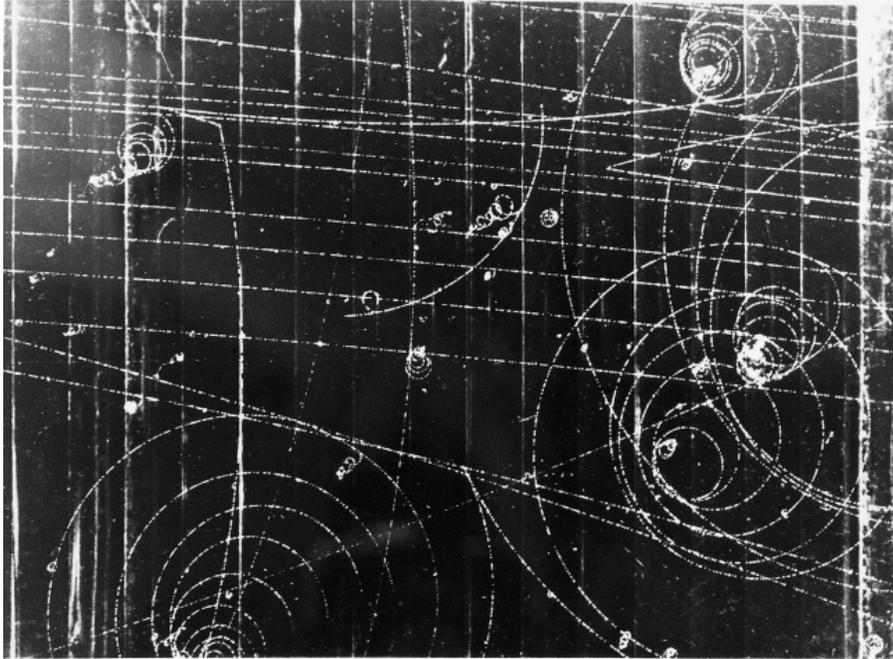


ν_{μ}



Nucl. Phys. B73 (1974) 1.

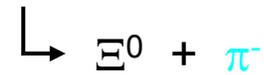
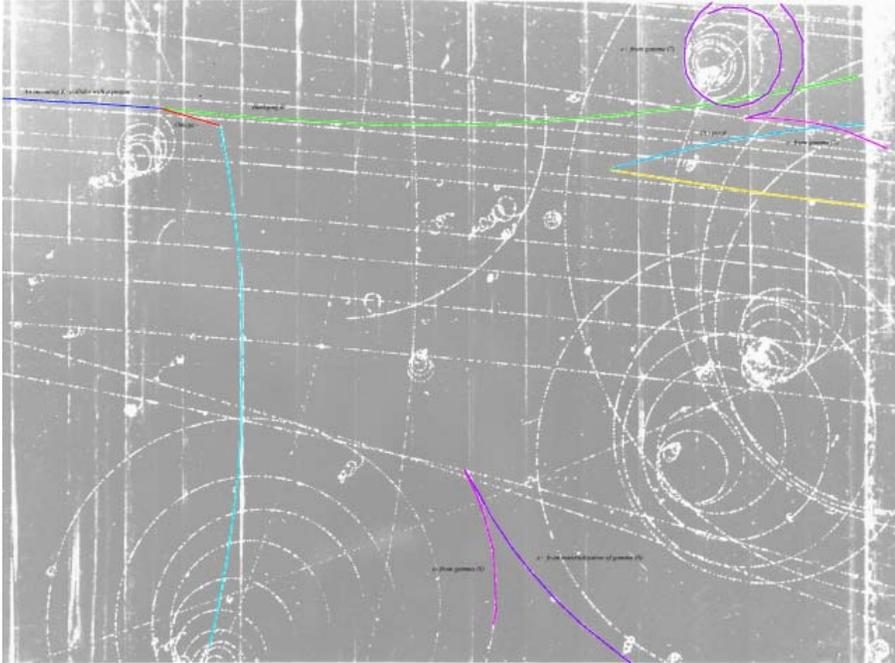
Découverte de Ω^-



faisceau de K^-
chambre à bulles à H

Phys. Rev. Lett. 12 (1964) 204

Découverte de Ω^-



2. Principe de reconstruction

A partir d'un ensemble de points de mesure dans le détecteur, le but de reconstruction est de les séparer en sous ensembles.

Chaque sous ensemble doit contenir les points de mesure provenant de la même particule et, également, un sous ensemble contenant tous les points qui ne peuvent pas être associés à la trajectoire de la particule avec suffisamment de certitude (signal accidentel du détecteur, types d'évènements non sélectionnés).

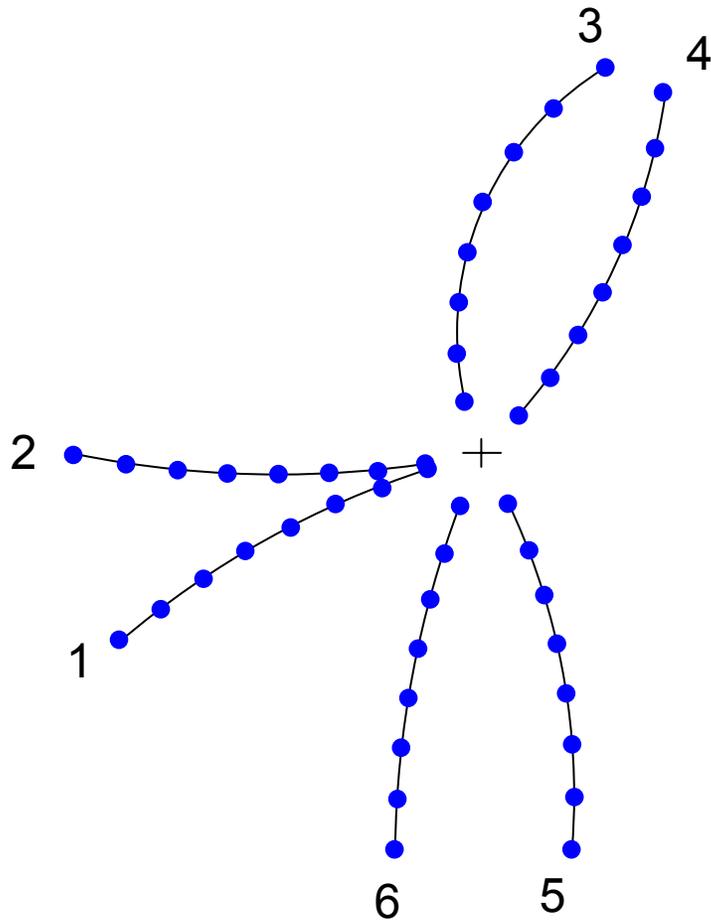
Les méthodes de reconstruction des traces peuvent être classées selon 2 approches :

- * globale

- * locale

- La méthode est dite **globale**, si la totalité des points est entrée en même temps dans l'algorithme de reconstruction.
- La méthode dite **locale**, au contraire, fait un suivi de la trace à partir d'une trace initiale (candidate) par extrapolation vers de futurs points.

2. Principe de reconstruction méthode globale



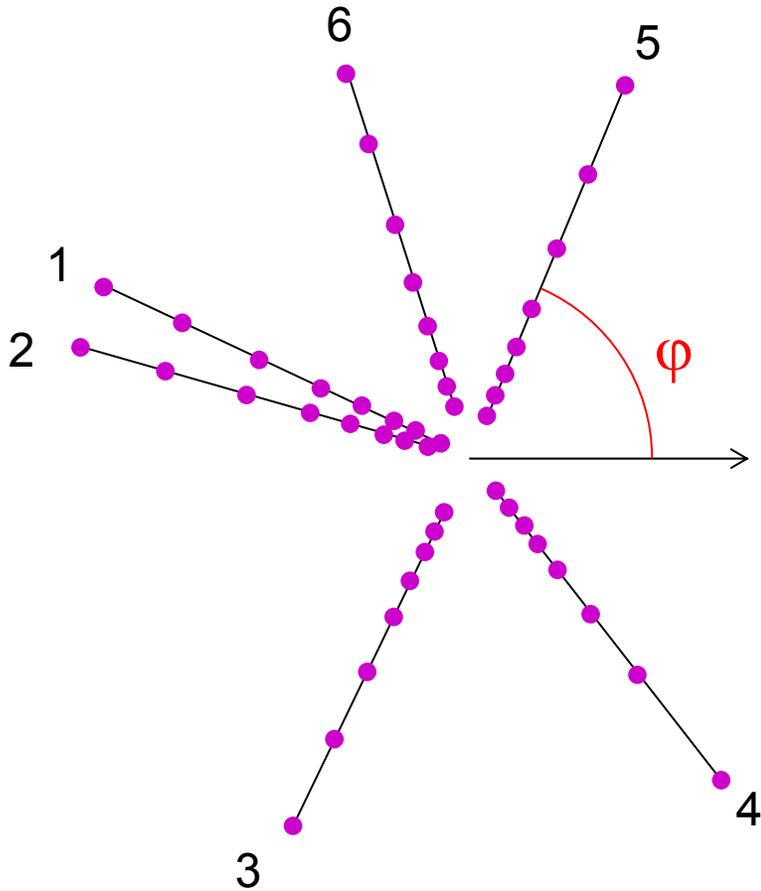
exemple : les trajectoires des particules forment des arcs de cercle autour du point d'interaction.

transformation :

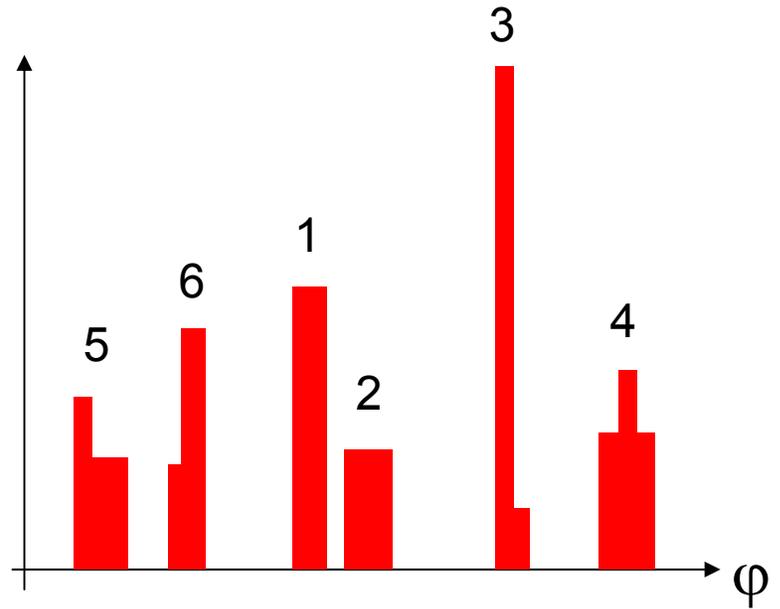
$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$v = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

⇒ lignes droites dans le plan (u,v)



histogramme des traces angulaires



la plus proche distance de l'origine est $d = 1/2R$ où R est le rayon de la trace.

2. Principe de reconstruction méthode locale

étude d'un cas simple :

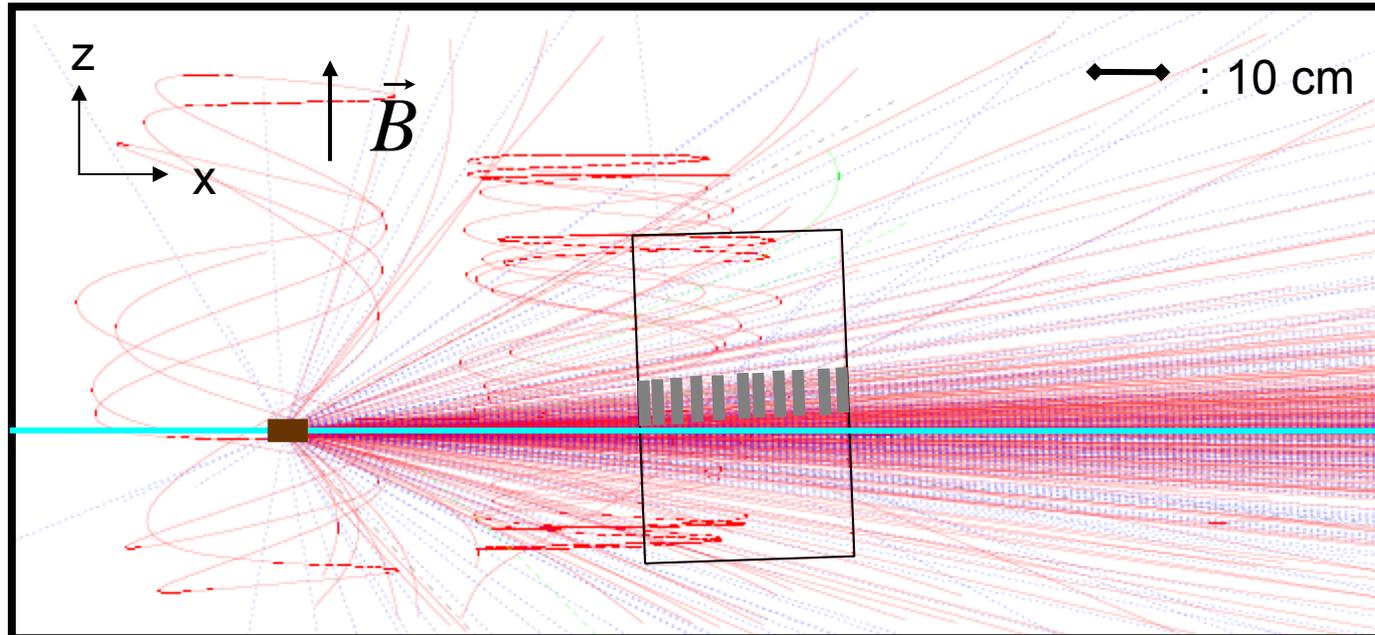
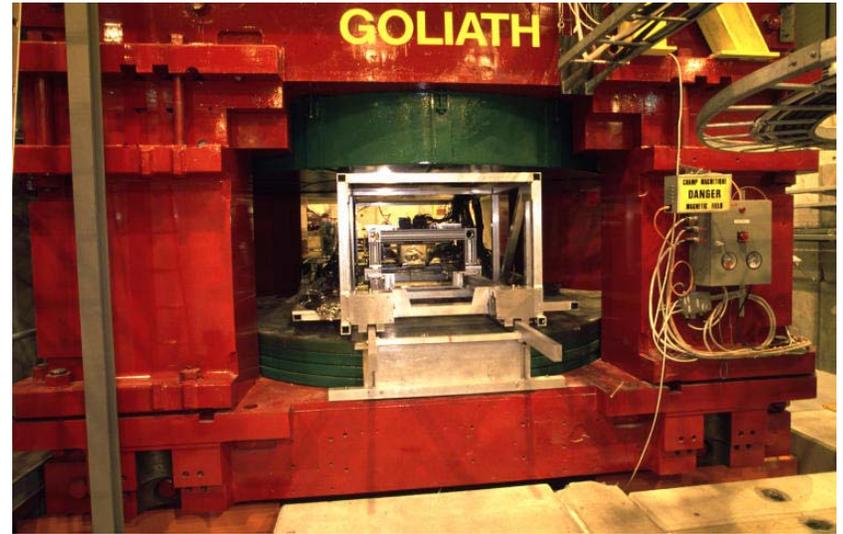
La reconstruction se fait en 2 étapes :

"track finding" et *"track fitting"*

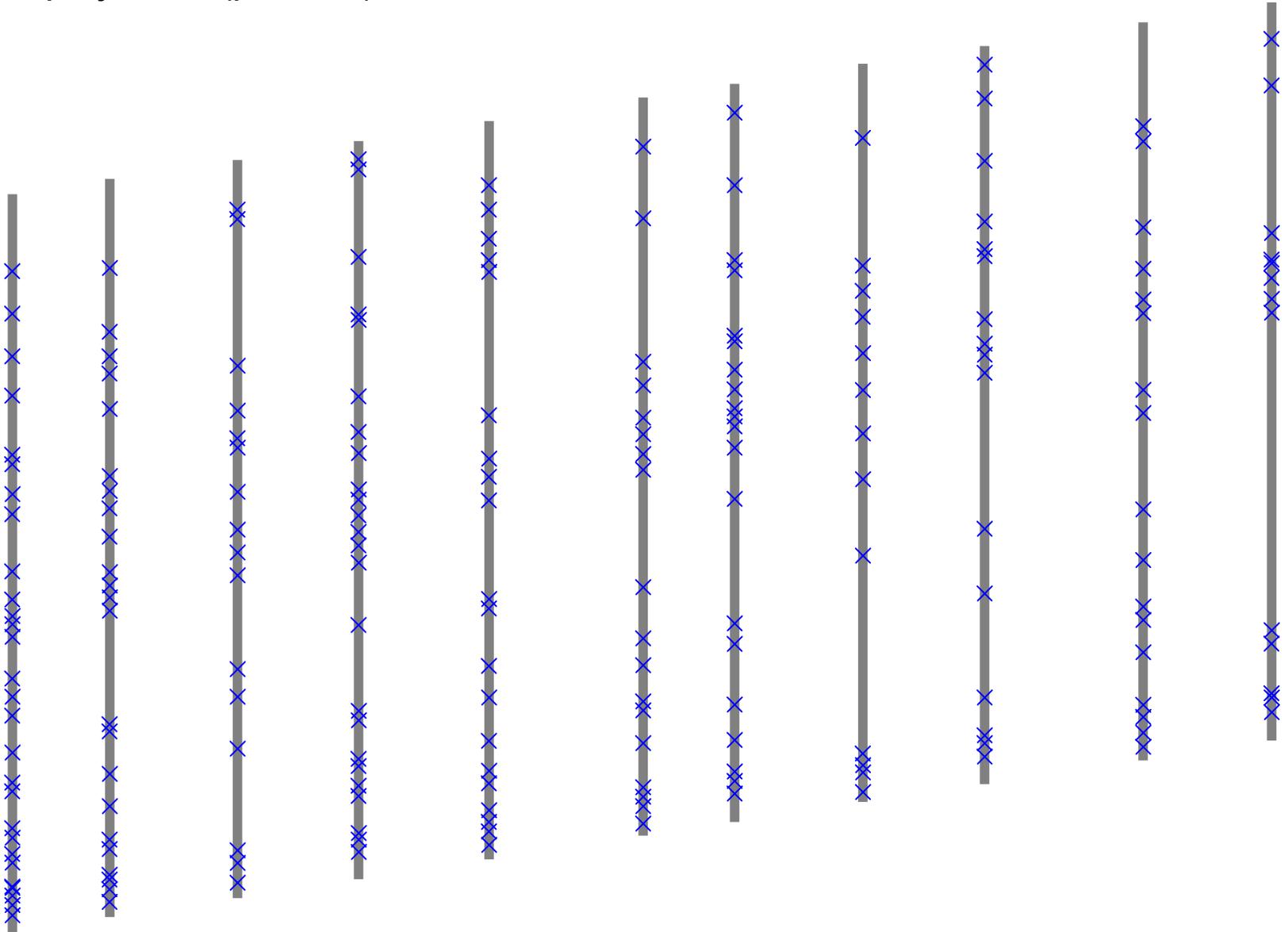
1ère étape : recherche des traces potentielles

2ème étape : ajustement des points d'une trace
par la méthode des moindres carrés et
purification (ajout ou retrait de hits)

NA-57 / CERN

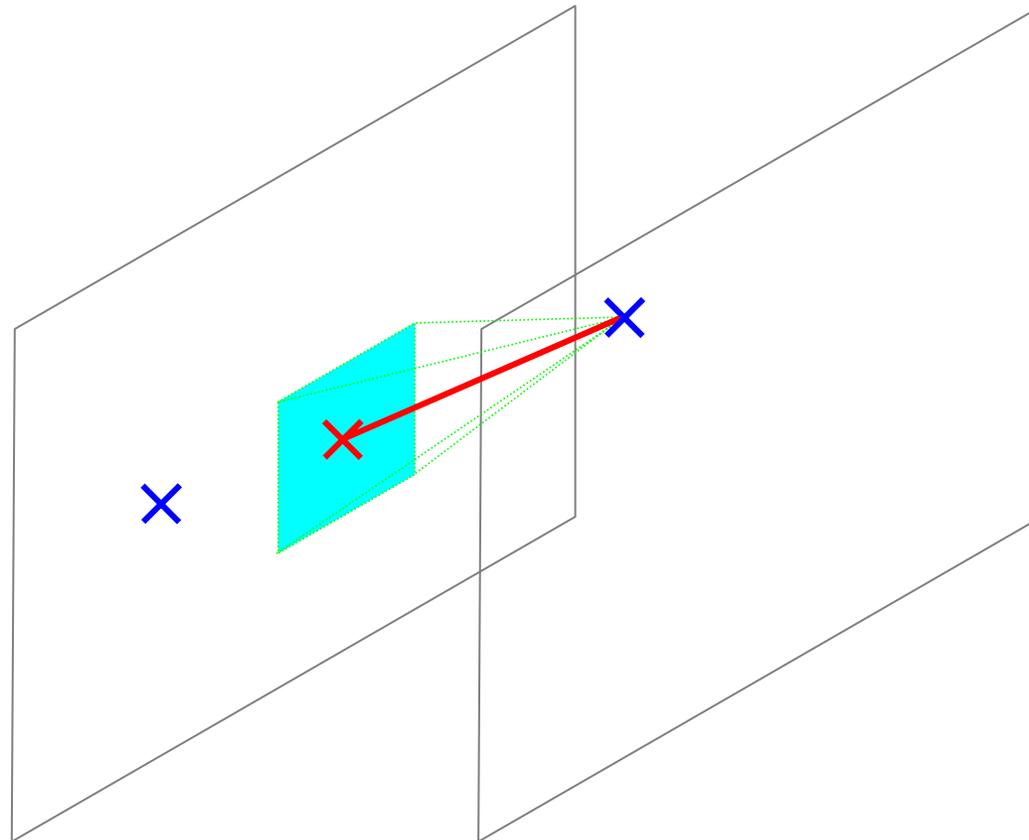


projection (plan x,z) des hits

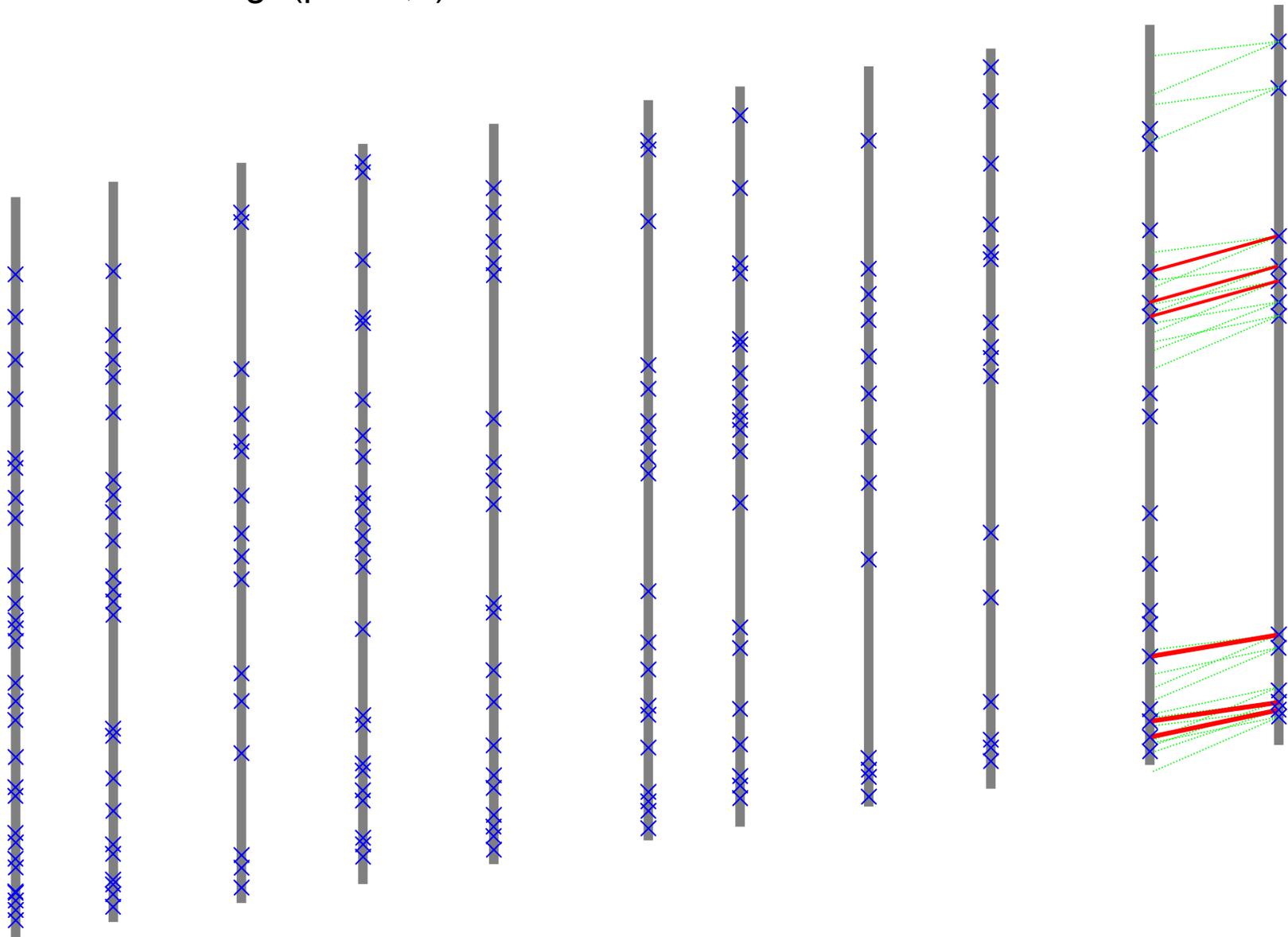


Méthode .

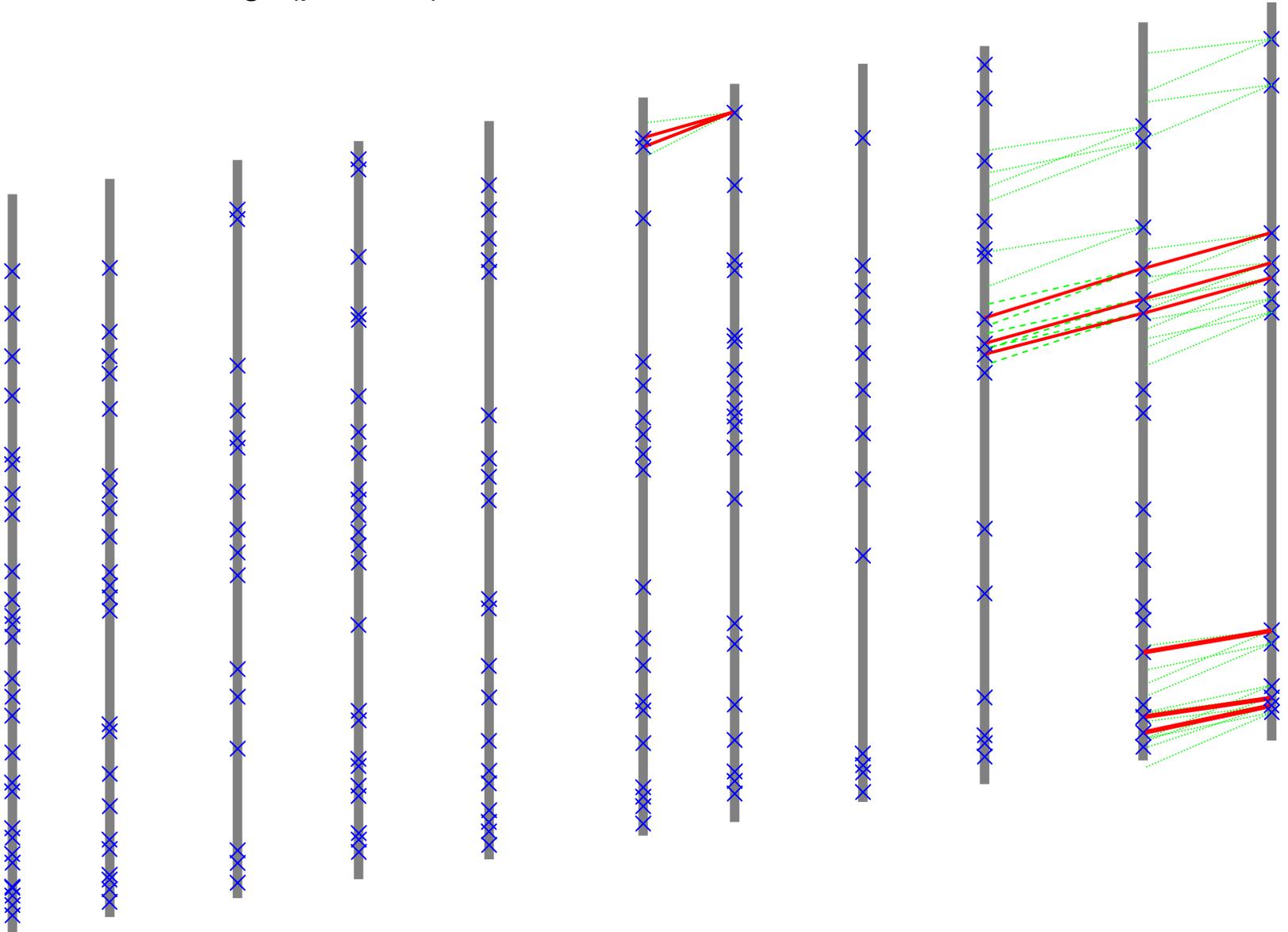
1. Partant d'un hit donné du dernier plan de détection
→ une projection sur le plan de détection précédent.
2. Recherche des hits présents dans la zone.
3. Construction de la (des) trace(s).



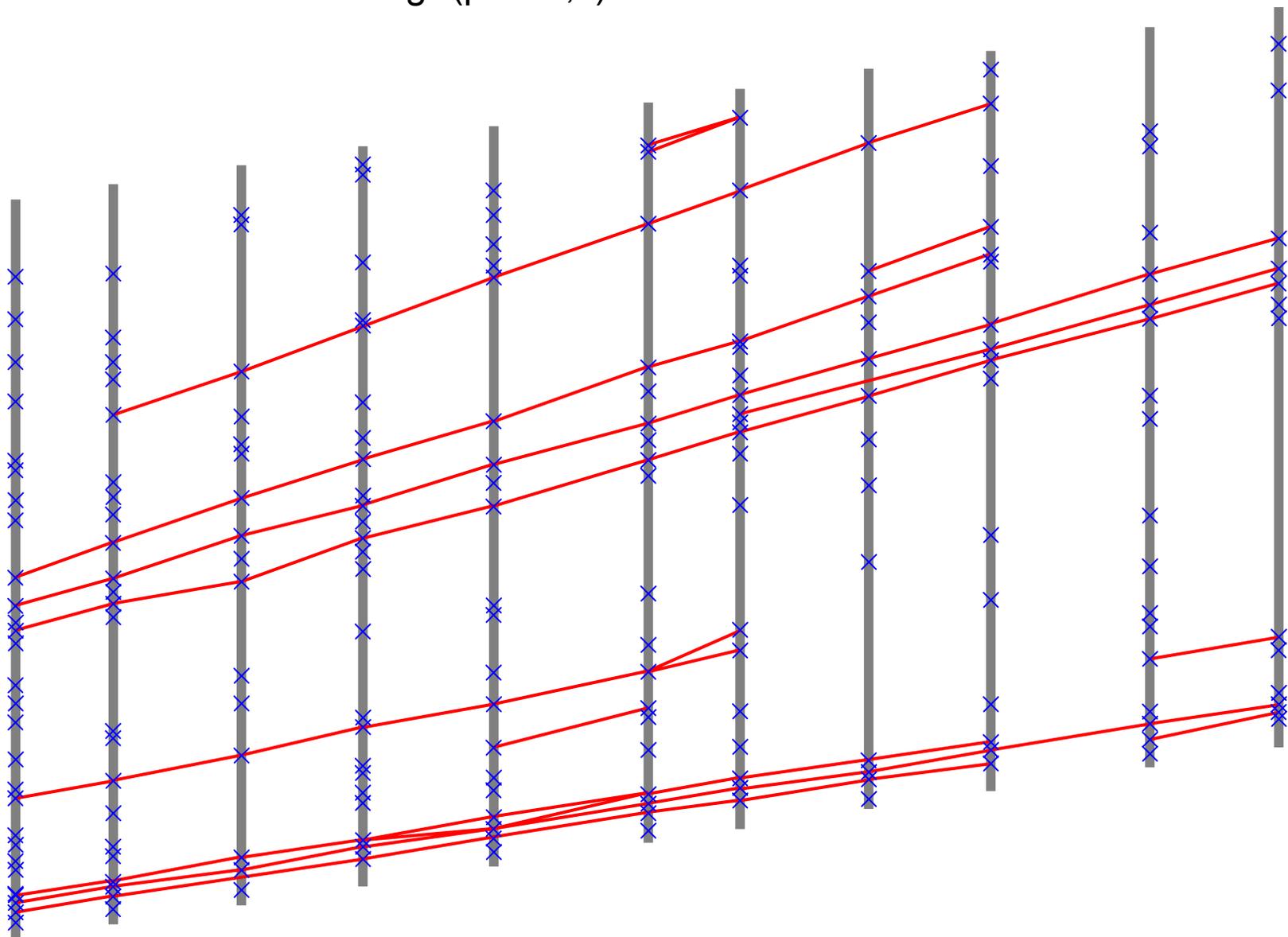
"track finding" (plan x,z)



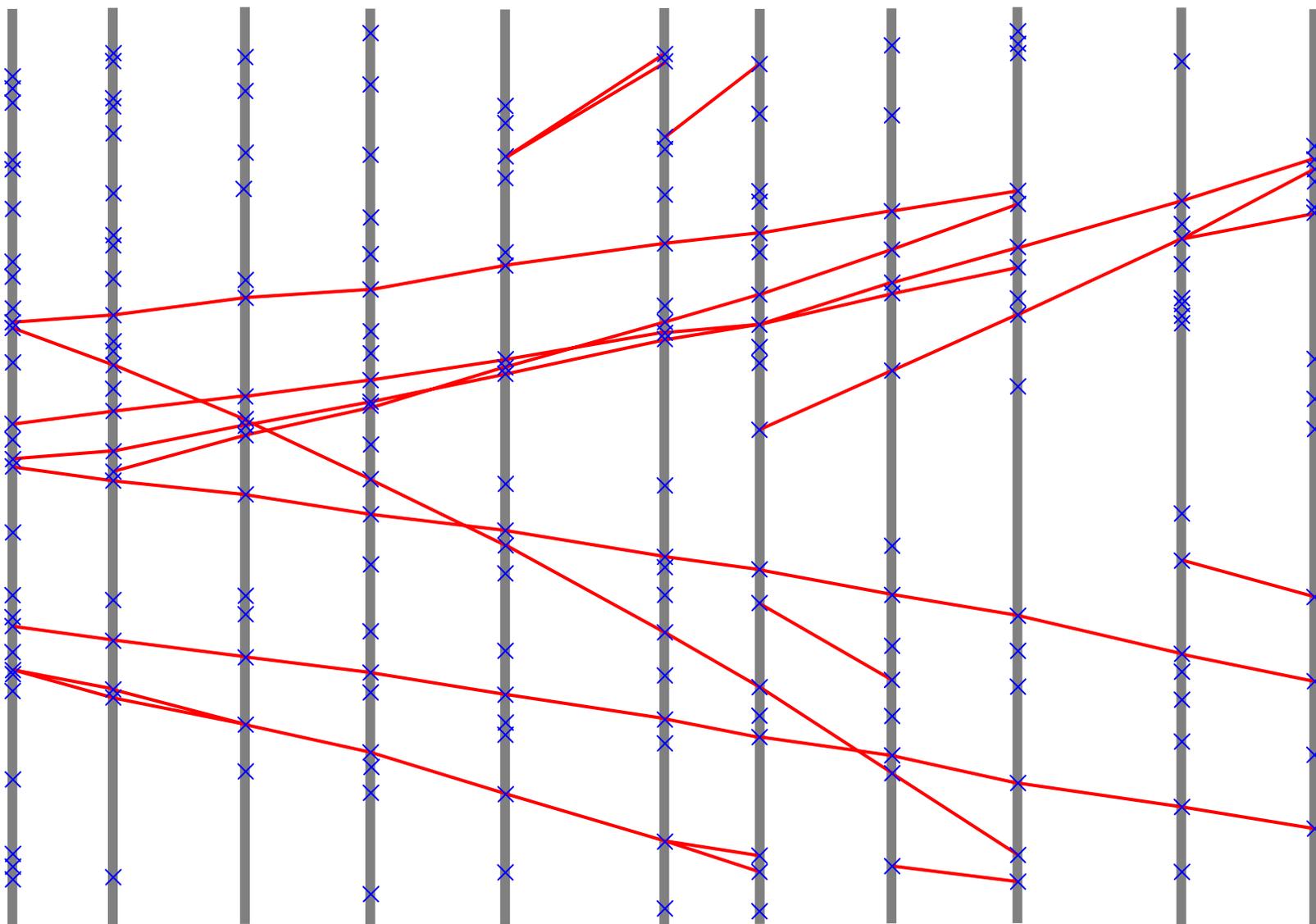
"track finding" (plan x,z)



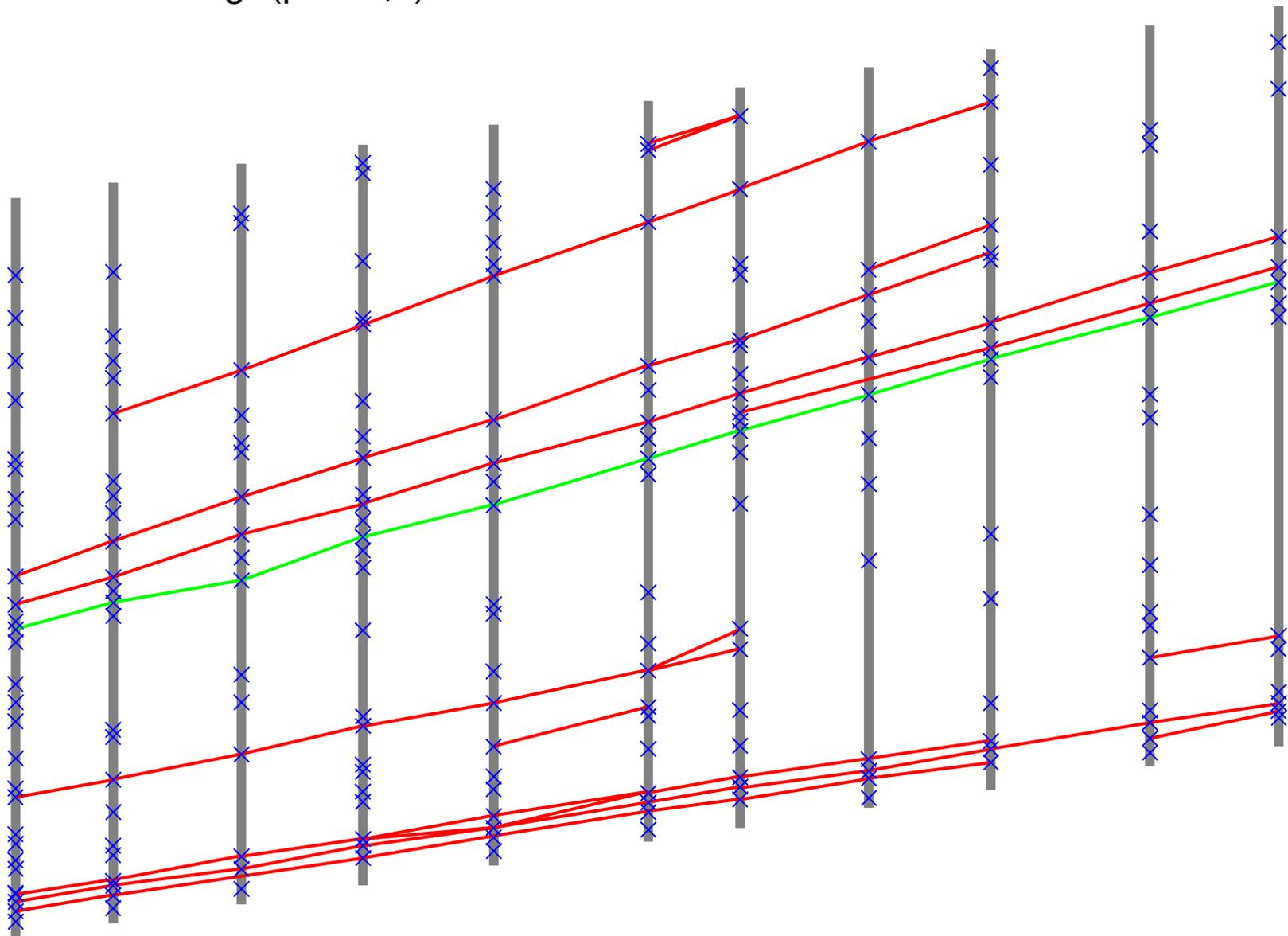
Résultat "track finding" (plan x,z)



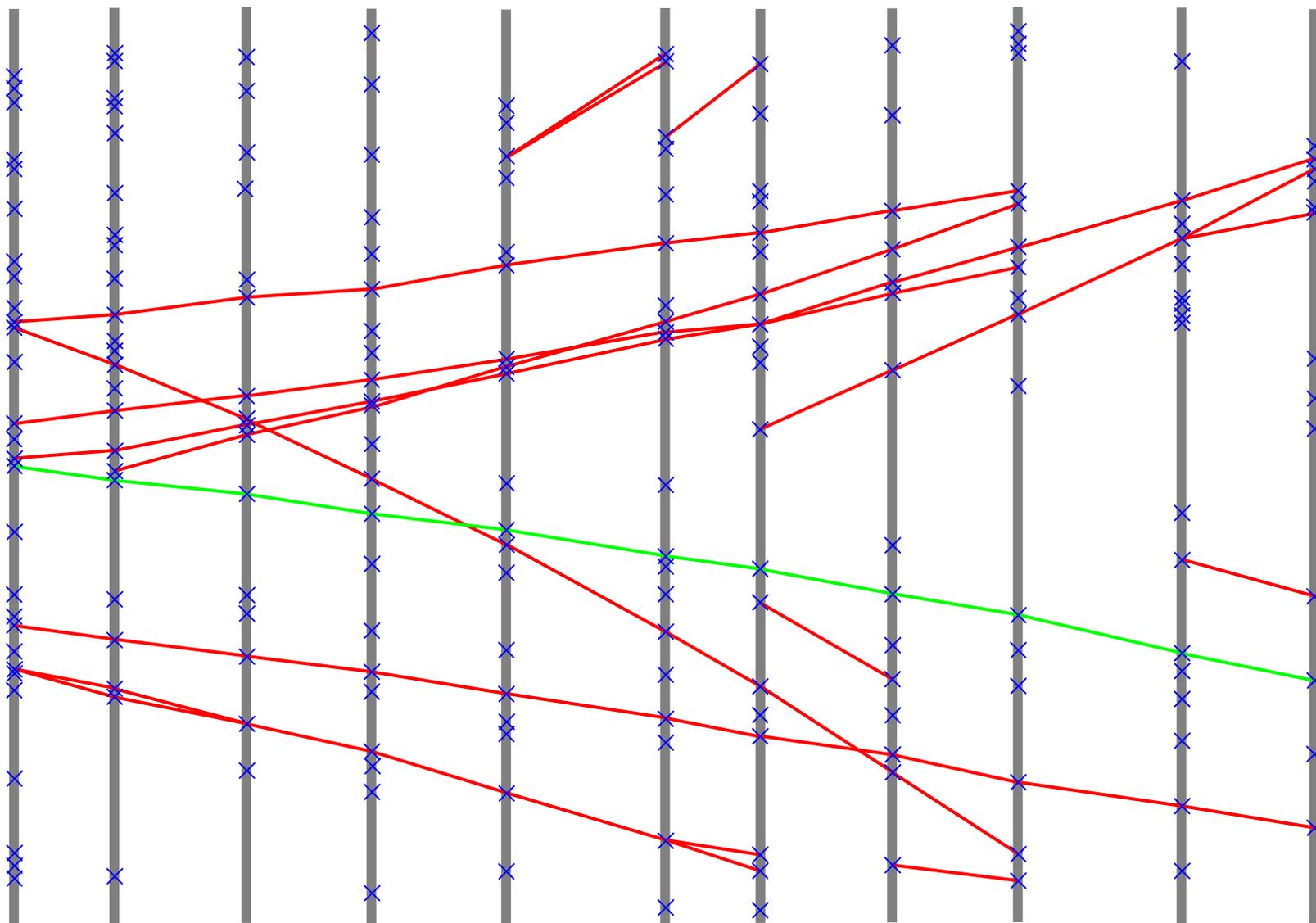
Résultat "track finding" (plan x,y)



"track fitting" (plan x,z)



"track fitting" (plan x,y)



Méthode des moindres carrés

La méthode consiste à rechercher les paramètres θ d'une fonction $f_\theta(x_i)$ qui reproduisent au mieux les données expérimentales.

⇒ minimisation de la somme quadratique des déviations des mesures y_i aux prédictions $f_\theta(x_i)$:

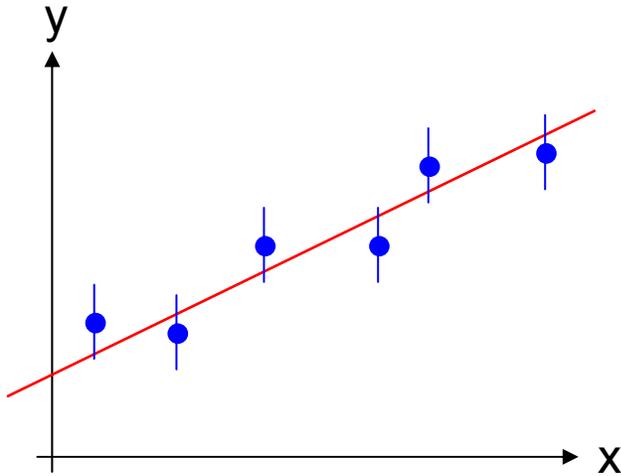
$$S = \sum_{i=1}^N \left(\frac{y_i - f_\theta(x_i)}{\sigma_i} \right)^2 = \sum_{i=1}^N w_i (y_i - f_\theta(x_i))^2$$

← écart type de la mesure y_i

→ poids de la variance de y_i

recherche de θ_{\min} tel que $\frac{\partial S}{\partial \theta} = 0$

exemple simple :



$$f_{\theta}(x_i) = \alpha \cdot x_i + \beta$$

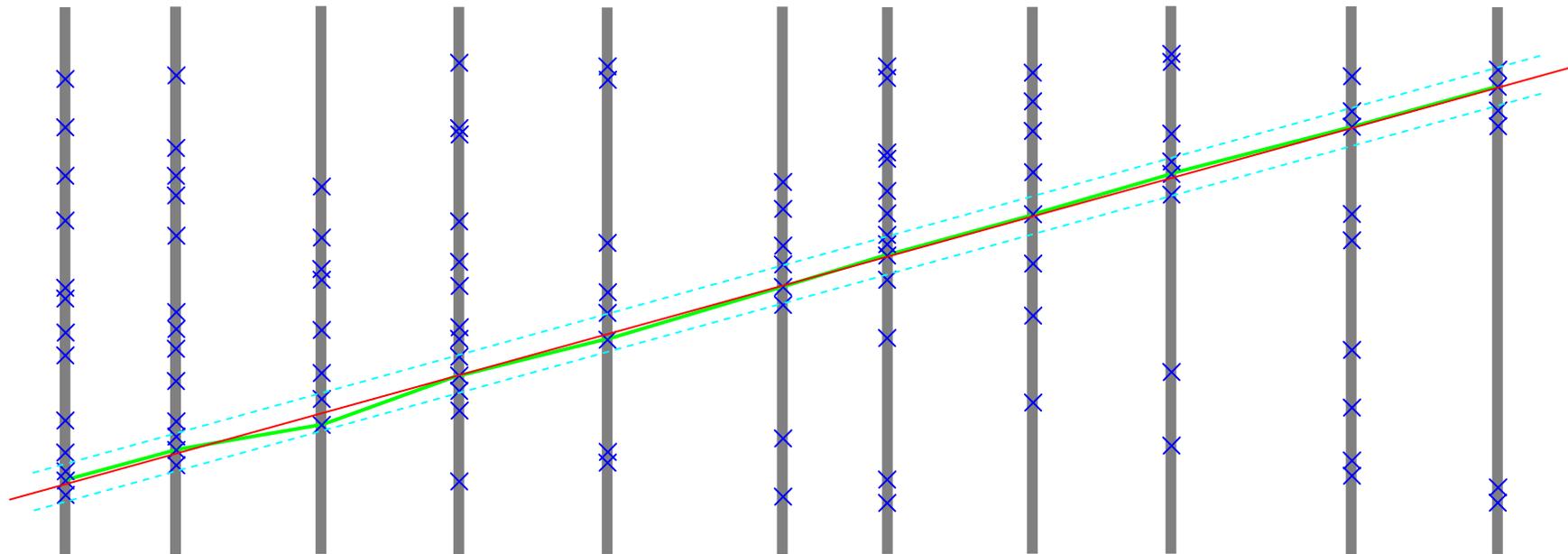
$$S = \sum_{i=1}^N w_i (y_i - \alpha \cdot x_i - \beta)^2$$

$$\text{minimisation : } \begin{cases} \frac{\partial S}{\partial \alpha} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial \beta} = 0 \end{cases}$$

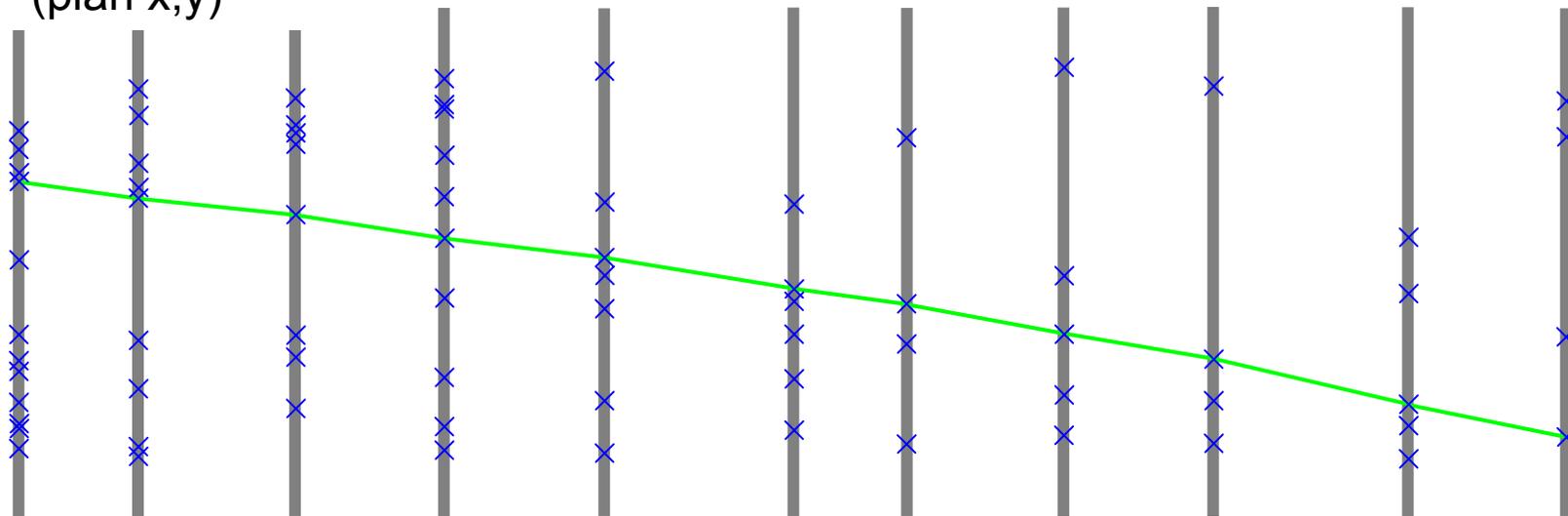
$$\begin{cases} \alpha \cdot \sum w_i x_i^2 + \beta \cdot \sum w_i x_i = \sum w_i x_i y_i \\ \alpha \cdot \sum w_i x_i + \beta \cdot \sum w_i = \sum w_i y_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\sum w_i \sum w_i x_i y_i - \sum w_i x_i \sum w_i y_i}{\sum w_i \sum w_i x_i^2 - (\sum w_i x_i)^2} \\ \beta = \frac{\sum w_i x_i^2 \sum w_i y_i - \sum w_i x_i \sum w_i x_i y_i}{\sum w_i \sum w_i x_i^2 - (\sum w_i x_i)^2} \end{cases}$$

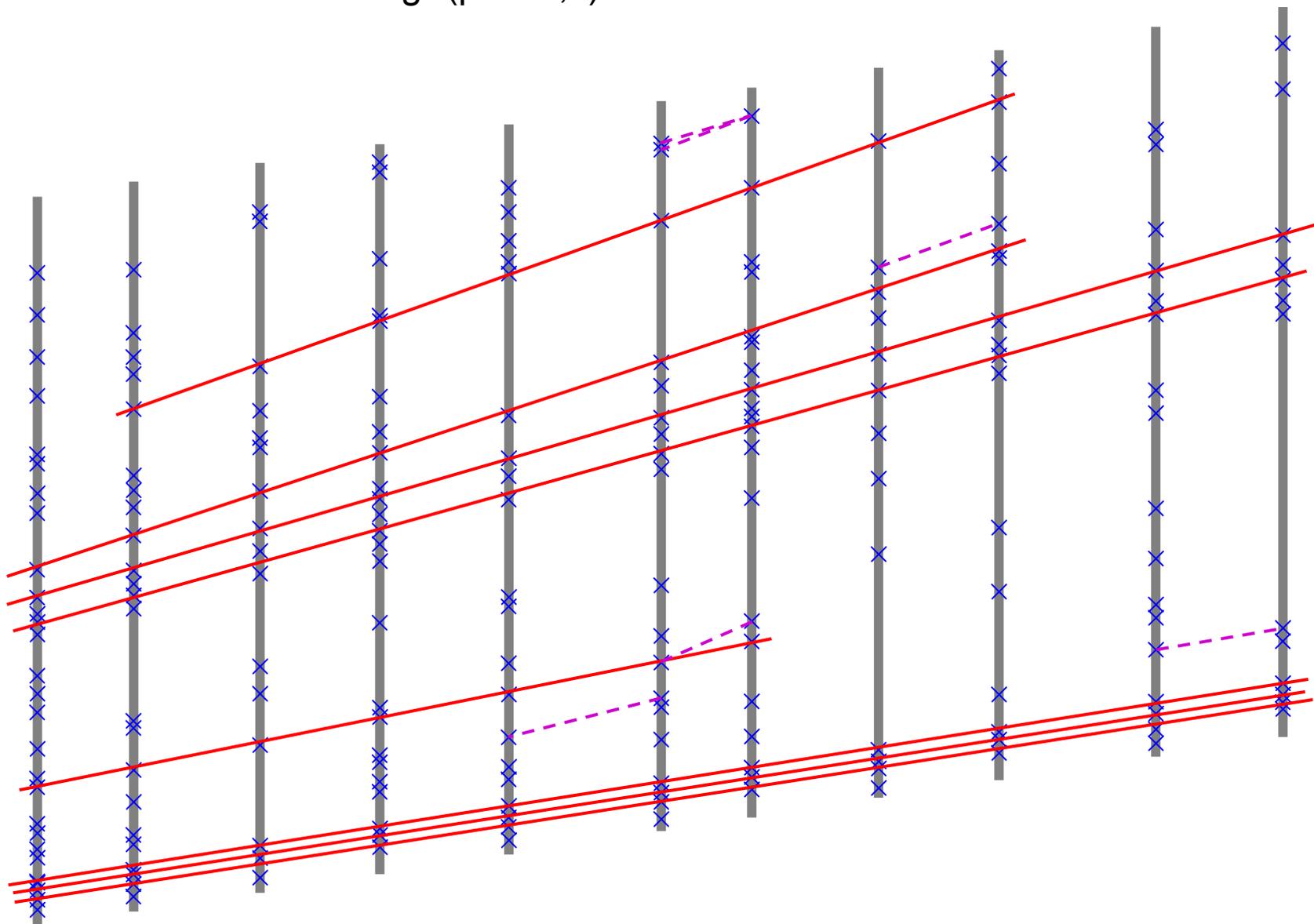
(plan x,z)



(plan x,y)

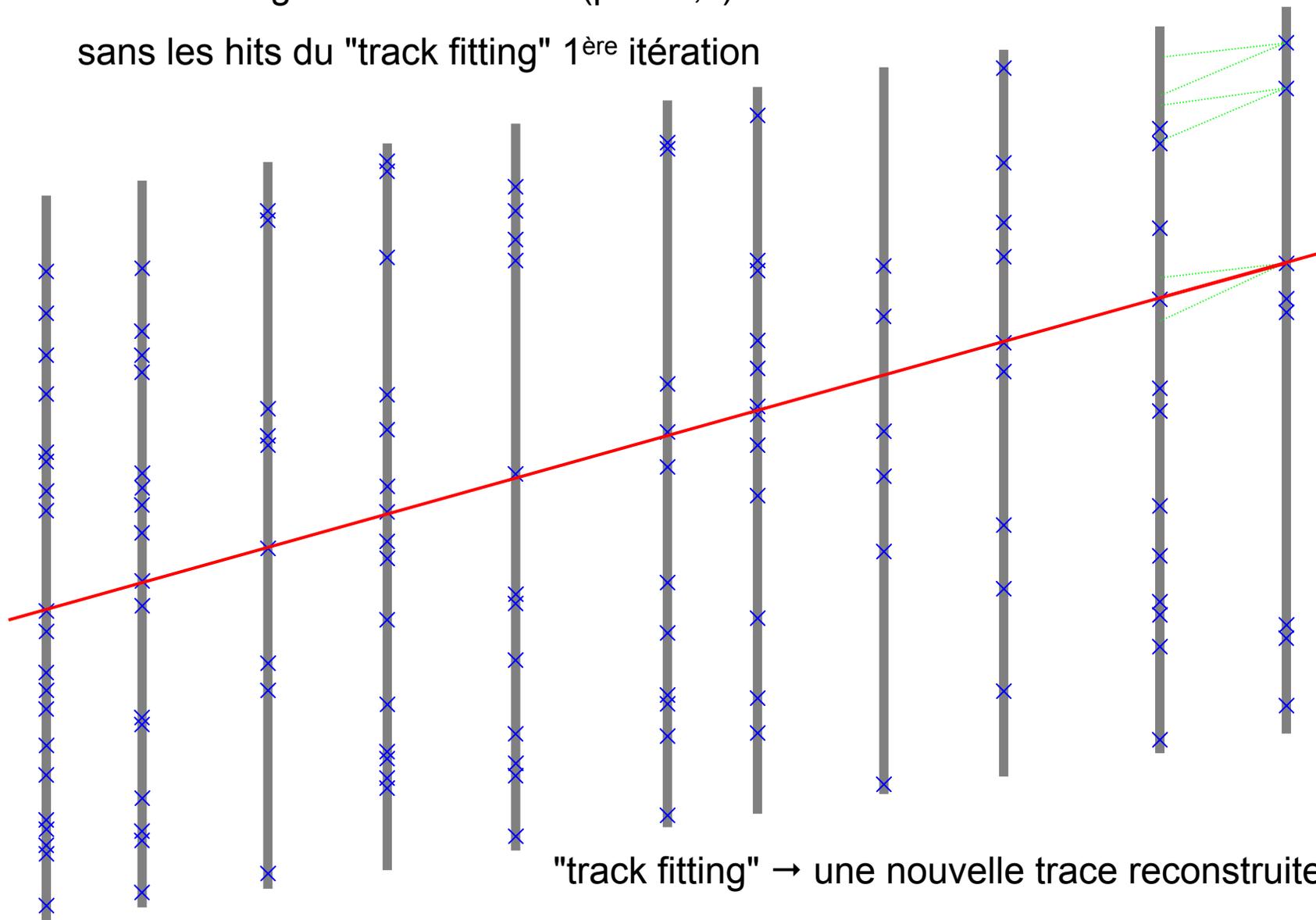


Résultat "track fitting" (plan x,z)



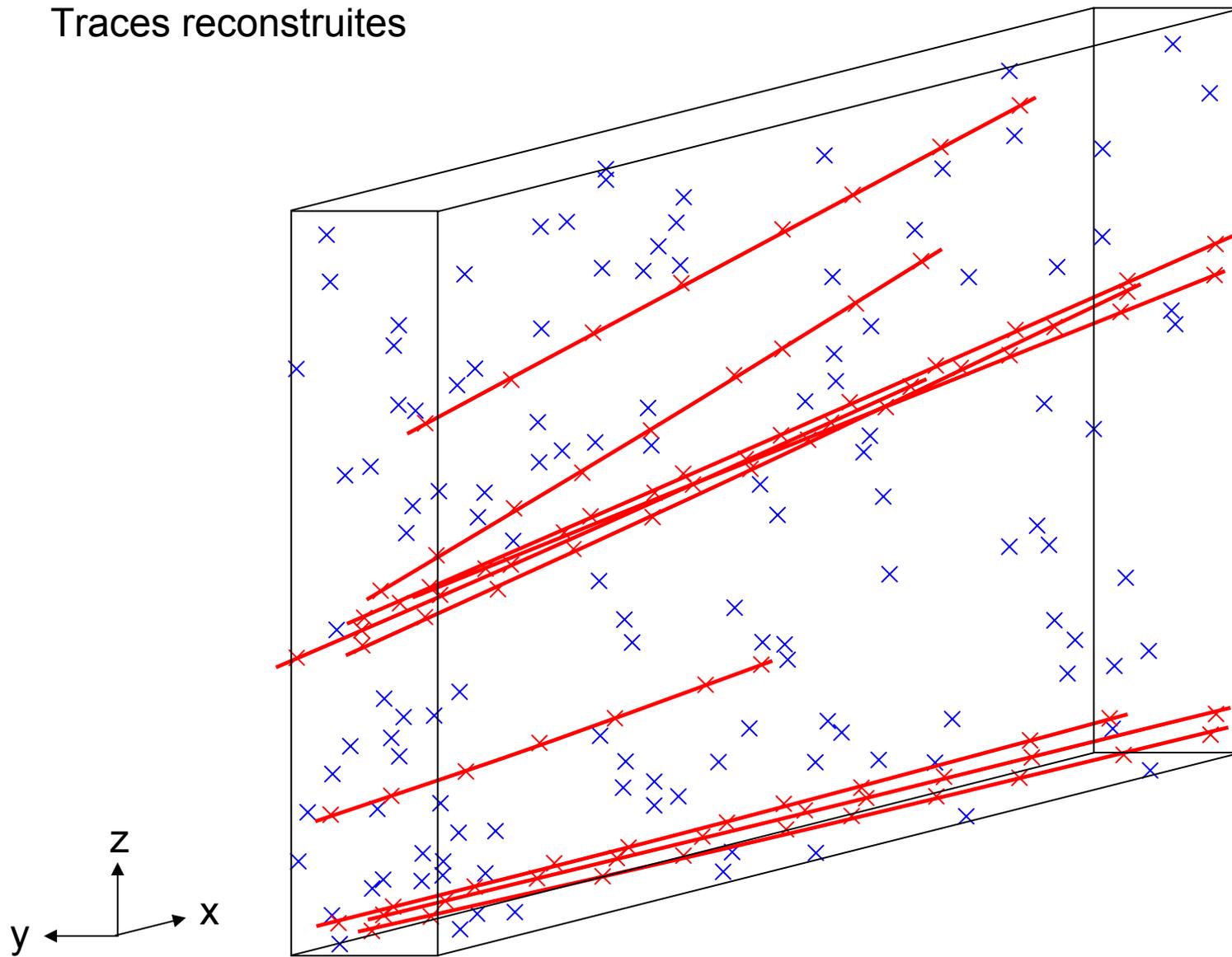
"track finding" - 2^{ème} itération (plan x,z)

sans les hits du "track fitting" 1^{ère} itération

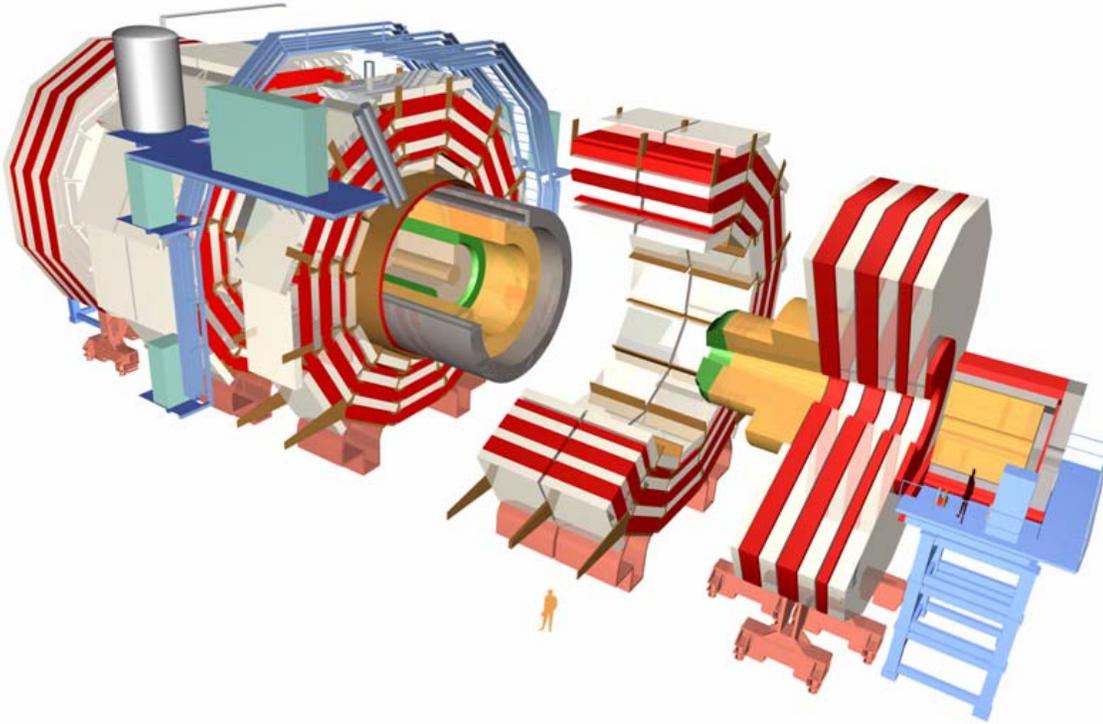


"track fitting" → une nouvelle trace reconstruite
nouvelle itération "track finding" et "track fitting" ...

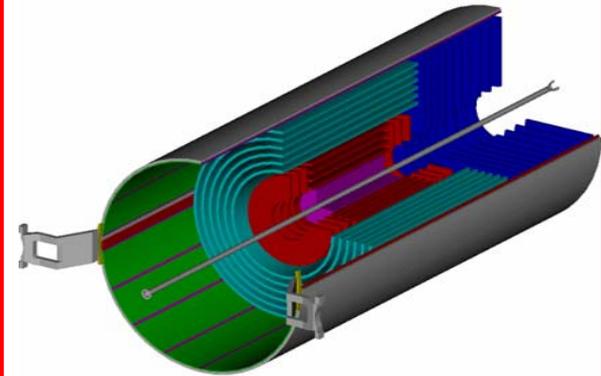
Traces reconstruites



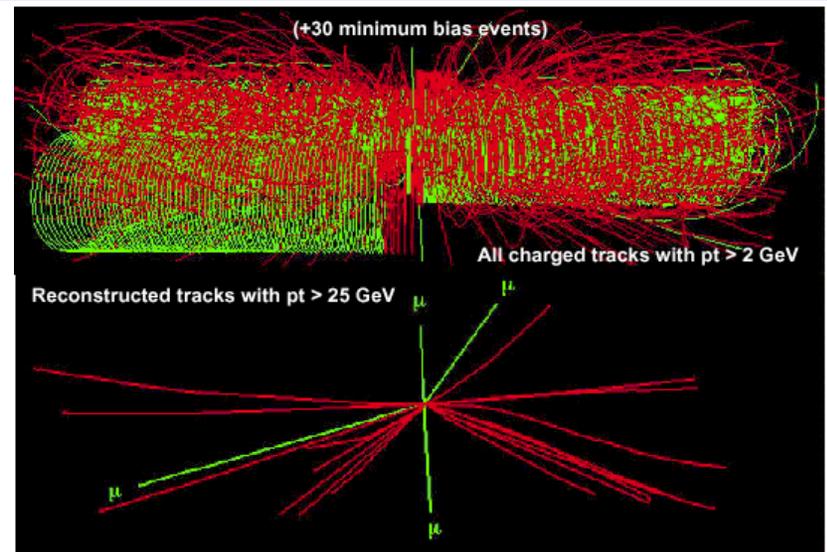
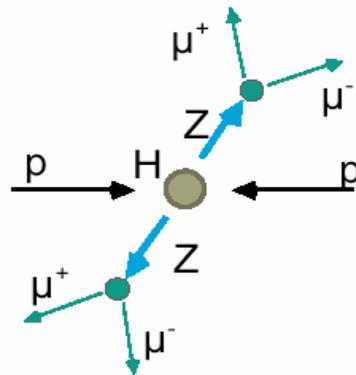
3. Détecteur CMS

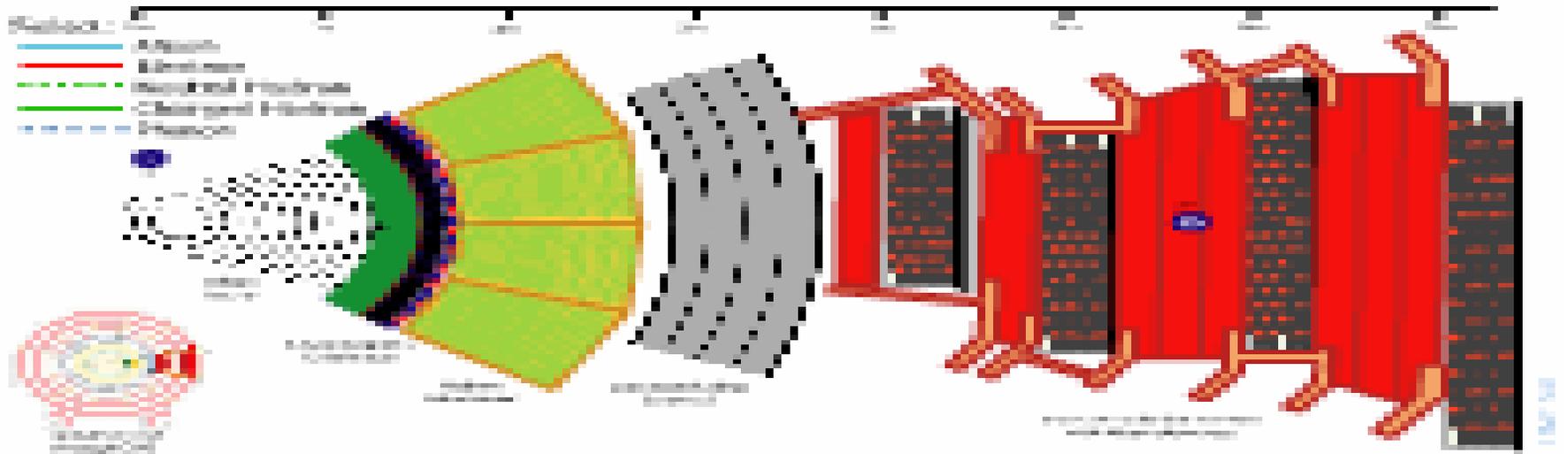


trajectographe

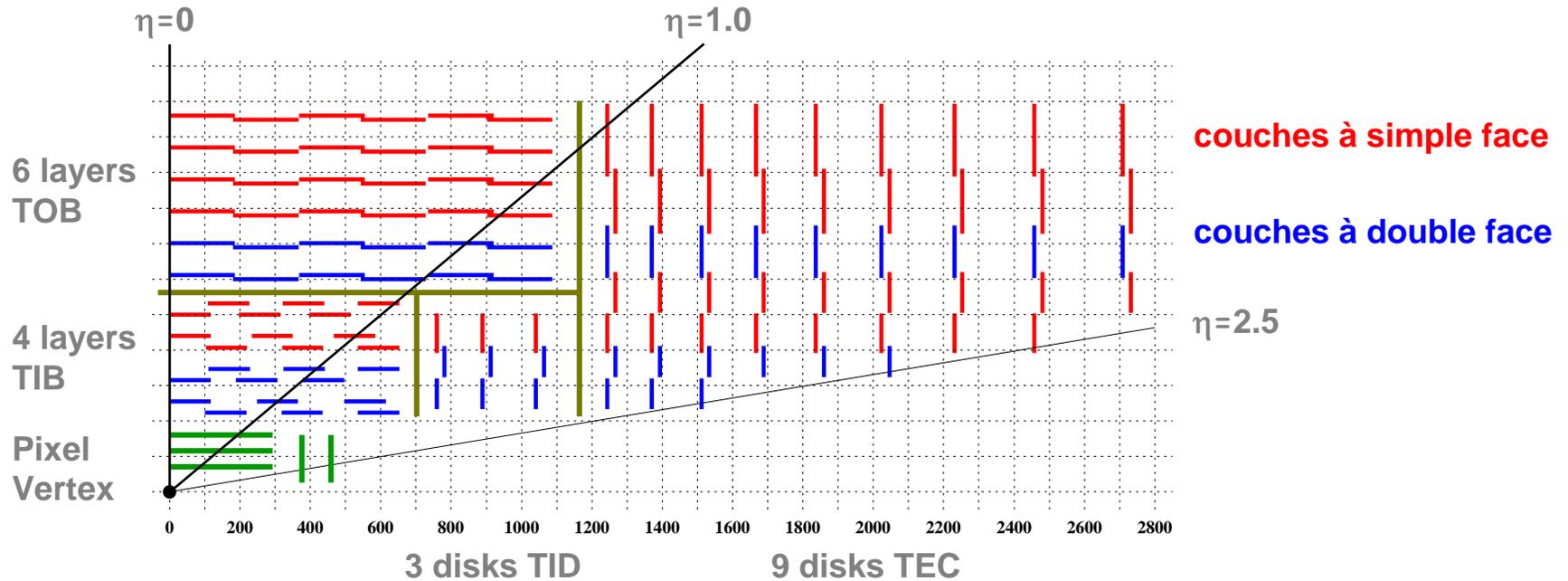


Recherche du boson de Higgs.





coupe du trajectographe Si de CMS

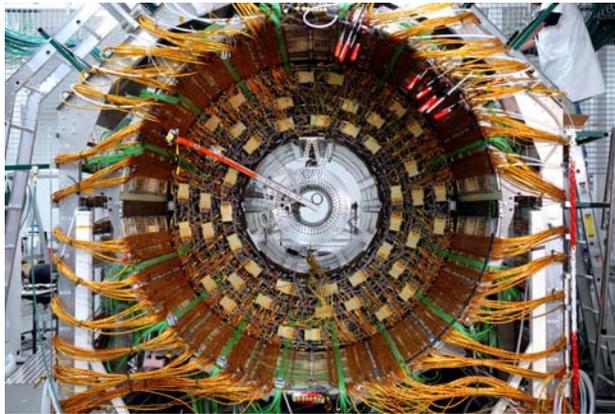


Pseudorapidité (η) : description géométrique d'une particule

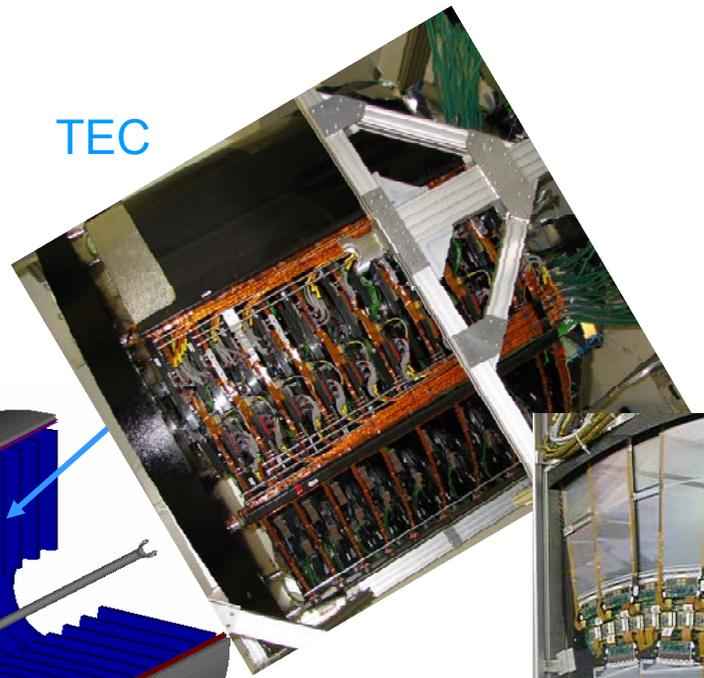
$$\eta = -Ln\left(\tan\left[\frac{\theta}{2}\right]\right)$$

où θ est l'angle polaire entre l'impulsion de la particule et l'axe z.

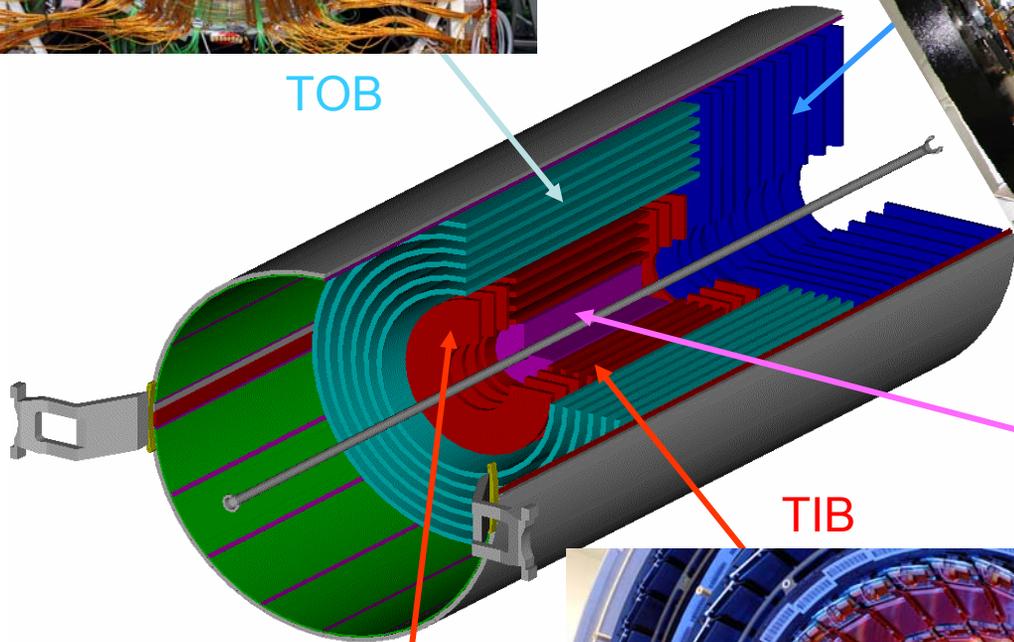
Le sens de la reconstruction : de l'extérieur vers l'intérieur



TEC

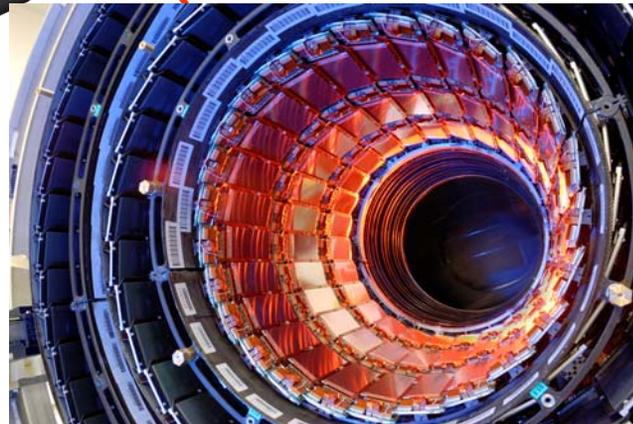


TOB



pixel

TIB



TID

Trajectographe CMS

~ 210 m² détecteurs Si

Ø 2.4 m x 5.4 m

4. Méthode de reconstruction des traces avec le filtre de Kalman

Le filtre de Kalman est une procédure récursive qui permet de déterminer l'évolution d'un vecteur d'état sous contrainte dynamique avec la présence de perturbations aléatoires. *Méthode mise au point dans les années soixante pour le calcul de trajectoires de fusées ou de missiles détectés par les radars.*

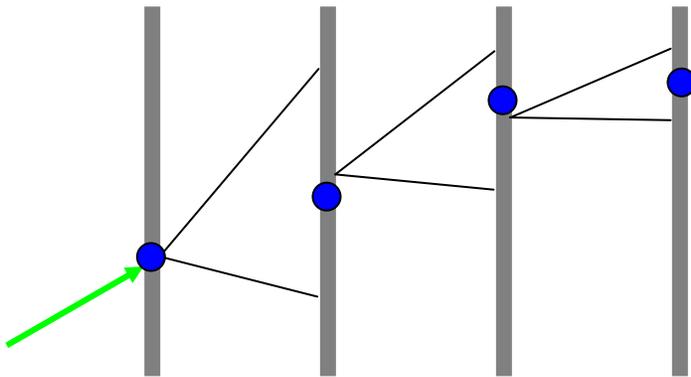
Principe pour la physique des hautes énergies (reconstruction des traces laissées par les particules chargées dans le détecteur) :

partant d'une estimation grossière des paramètres de trace, le filtre de Kalman permet d'actualiser et d'améliorer les paramètres de trace en passant d'une couche de détection à une autre.

Nucl. Inst. Meth. A262 (1987) 444.

Les paramètres de trace estimés à une couche de détection sont propagés vers la couche suivante, selon l'équation de mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique.

Ces informations combinées à celles des coordonnées des hits mesurés sur la même couche de détection permettront une nouvelle estimation plus précise de la trajectoire.



Equation de mouvement

Trajectoire d'une particule chargée dans un champ magnétique :

$$\text{Force de Lorentz : } \vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

$$\text{Relation fondamentale de la dynamique : } \sum \vec{F} = \frac{d \vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} (\gamma m \vec{v}) = \gamma m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2}$$

s : parcours le long de la trajectoire

$$\begin{aligned} \frac{d \vec{p}}{dt} &= \gamma m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \gamma m \frac{d}{dt} \left(\frac{d \vec{x}}{dt} \right) = \gamma m \frac{d}{dt} \left(\frac{d \vec{x}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \right) = \gamma m \frac{d}{dt} \left(\frac{d \vec{x}}{ds} \cdot \beta c \right) \\ &= \|\vec{v}\| = \beta c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d \vec{p}}{dt} &= \gamma m \left[\frac{d^2 \vec{x}}{dt ds} \cdot \beta c + c \frac{d \vec{x}}{ds} \frac{d \beta}{dt} \right] = \gamma m \frac{d^2 \vec{x}}{ds^2} \frac{d \vec{x}}{dt} \cdot \beta c = \gamma m \beta^2 c^2 \frac{d^2 \vec{x}}{ds^2} \\ &= 0 \quad \|\vec{v}\| = \text{const dans } \vec{B} \end{aligned}$$

$$\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B} = q \frac{d\vec{x}}{dt} \wedge \vec{B} = q \beta c \frac{d\vec{x}}{ds} \wedge \vec{B}$$

Ce qui donne :

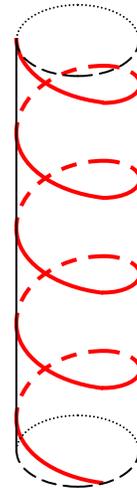
$$\beta c q \frac{d\vec{x}}{ds} \wedge \vec{B} = \gamma m \beta^2 c^2 \frac{d^2\vec{x}}{ds^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\vec{x}}{ds^2} = \frac{1}{\gamma m \beta c} q \frac{d\vec{x}}{ds} \wedge \vec{B}$$

Comme $P = \|\vec{p}\| = \gamma m \|\vec{v}\| = \gamma m \beta c$

$$\frac{d^2\vec{x}}{ds^2} = \frac{q}{P} \cdot \frac{d\vec{x}}{ds} \wedge \vec{B}$$

équation d'une hélice



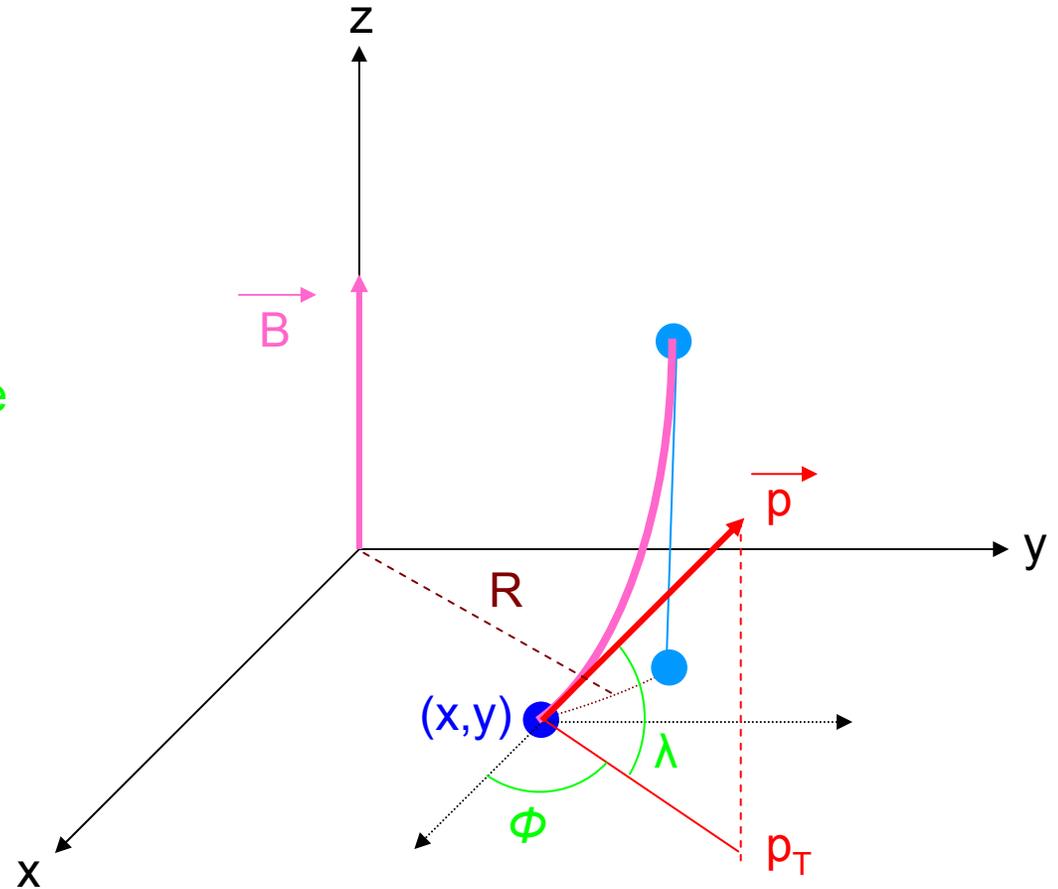
Hélice : objet à 5 D

5 paramètres de trace :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 = x \\ p_2 = y \\ p_3 = \phi \quad \text{angle azimutale} \\ p_4 = \lambda \quad \text{angle de plongée} \\ p_5 = q / P \quad \text{courbure} \end{array} \right.$$

$$\tan \phi = \frac{p_y}{p_x}$$

$$\tan \lambda = \frac{p_z}{p_T} \quad \text{où} \quad p_T = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$$

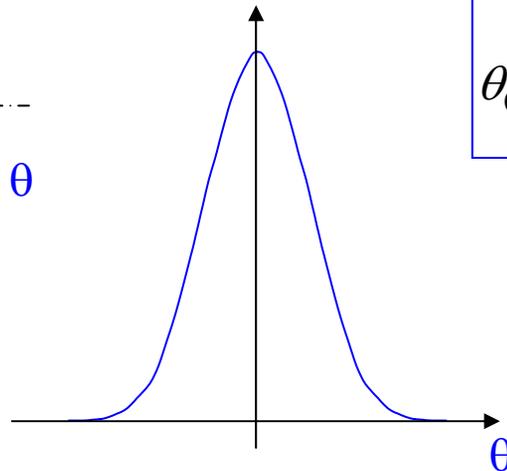
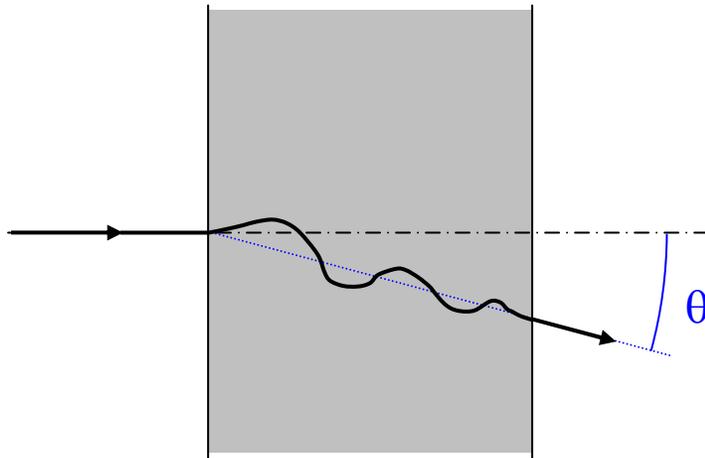


Les interactions des particules avec les matières composant le détecteur affectent les trajectoires qui ne sont plus parfaitement hélicoïdales.

2 classes principales d'interactions :

* les pertes d'énergie (minimes pour les particules MIPS, sauf électrons / rayonnement de freinage)

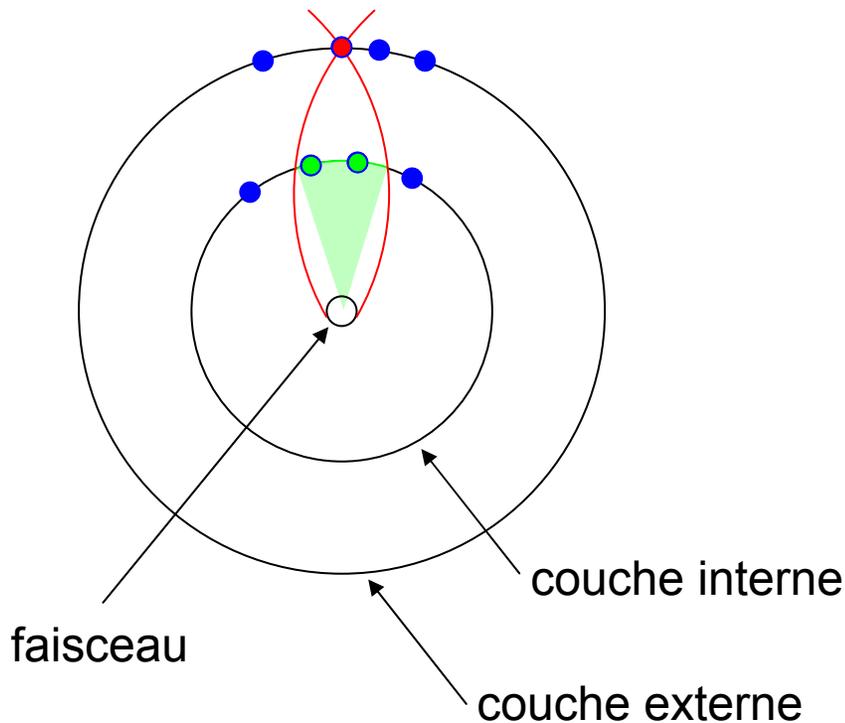
* la diffusion coulombienne multiple (affecte la direction des traces et leur courbure)



$$\frac{1}{\theta_0 \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\theta^2}{2\theta_0^2}\right)$$
$$\theta_0 \approx \frac{13.6(\text{MeV})}{\beta \cdot p} \sqrt{x/X_0}$$

Générateur de germes

Utilisation des couches à pixels



Tous les hits de la couche externe sont traités séquentiellement 1 par 1.

Pour chaque hit de la couche externe, une fenêtre est ouverte, fenêtre compatible avec le spot du faisceau et la coupure en p_T .

L'excellente granularité du détecteur pixel permet une bonne qualité des germes avec une efficacité $> 99\%$.

Reconstruction de la trajectoire

Les trajectoires sont reconstruites à partir d'un germe donné (estimation grossière des 5 paramètres de trace).

La trajectoire initiale est propagée vers une nouvelle couche de détection (en tenant compte des diffusions multiples et des pertes d'énergie).

A chaque nouvelle couche de détection, de nouvelles trajectoires sont construites en tenant compte des paramètres de trace actualisés (et leurs erreurs) pour chaque hit compatible.

Toutes les trajectoires candidates sont alors propagées vers la couche de détection suivante.

La procédure est répétée jusqu'à la couche la plus externe du trajectographe.

Afin de ne pas biaiser les résultats, toutes les trajectoires sont propagées en parallèle.

Afin de limiter la combinatoire, le nombre de trajectoires à développer est limité à chaque étape (χ^2 et le nombre de hits manquant).

Reconstruction de la trajectoire (mathématique)

Equation d'évolution du système :

$$P_{n+1} = F_n \cdot P_n + w_n$$

- P_k vecteur des paramètres de la trace à la couche k
- F_k matrice de propagation de la couche k à la couche k+1
- w_k variable aléatoire : perturbation de la trajectoire entre les couches k et k+1 - *diffusion multiple* $Q_k = \text{cov}(w_k)$

Equation de mesure :

$$m_{n+1} = H_{n+1} \cdot P_{n+1} + \varepsilon_{n+1}$$

- m_k coordonnées de la mesure sur la couche k
- H_k matrice permettant de passer des paramètres de la trace à la mesure sur la couche k
- ε_k erreur de mesure sur la couche k $V_k = G_k^{-1} = \text{cov}(\varepsilon_k)$

La reconstruction d'une trace s'effectue itérativement selon 2 étapes :

étape de prédiction : *extrapolation du vecteur des paramètres de la trace de la couche n vers la couche n+1* :

$$P_{n+1}^{préd} = F_n \cdot P_n$$

matrice de covariance :

$$C_{n+1}^{préd} = F_n \cdot C_n \cdot F_n^T + Q_n$$

étape de mise à jour : *actualisation du vecteur des paramètres de la trace de la couche n+1* :

$$P_{n+1} = C_{n+1} \cdot \left(\left(C_{n+1}^{préd} \right)^{-1} \cdot P_{n+1}^{préd} + H_{n+1}^T \cdot G_{n+1} \cdot m_{n+1} \right)$$

où

$$C_{n+1} = \left(\left(C_{n+1}^{préd} \right)^{-1} + H_{n+1}^T \cdot G_{n+1} \cdot H_{n+1} \right)^{-1}$$

On définit un vecteur résiduel :

$$r_{n+1} = m_{n+1} - H_{n+1} \cdot P_{n+1}$$

L'ajout du hit à la trace est décidé en fonction du χ^2 :

$$\chi^2 = r_{n+1}^T \cdot G_{n+1} \cdot r_{n+1} + \left(P_{n+1} - P_{n+1}^{préd} \right)^T \cdot C_{n+1}^{préd} \cdot \left(P_{n+1} - P_{n+1}^{préd} \right)$$

Si $\chi^2 <$ à une valeur seuil, le hit est ajouté à la trace. Sinon, la reconstruction passe à la couche suivante. Après 2 couches successives sans hit ajouté à la trace, la reconstruction s'arrête.

Reconstruction de la trajectoire - lissage

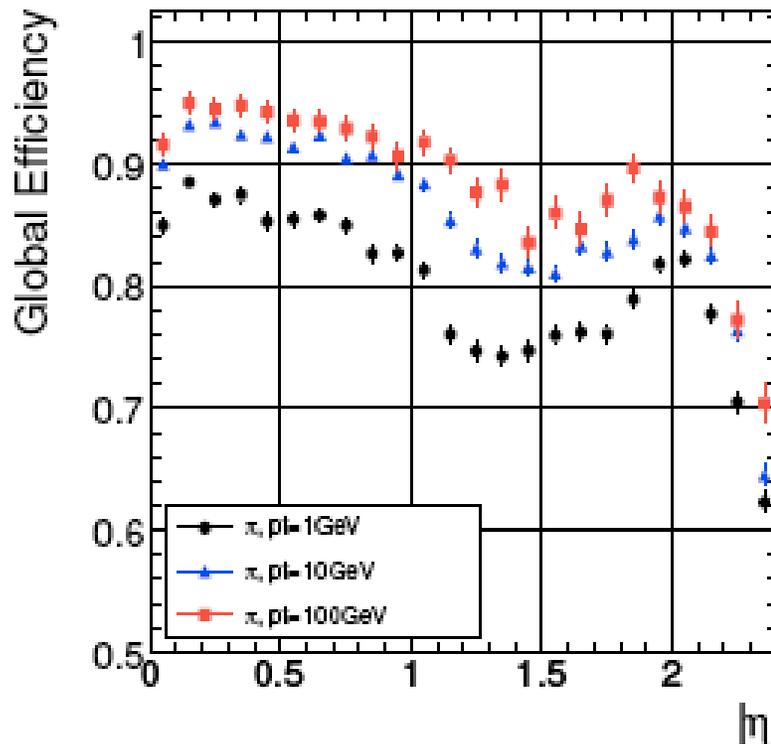
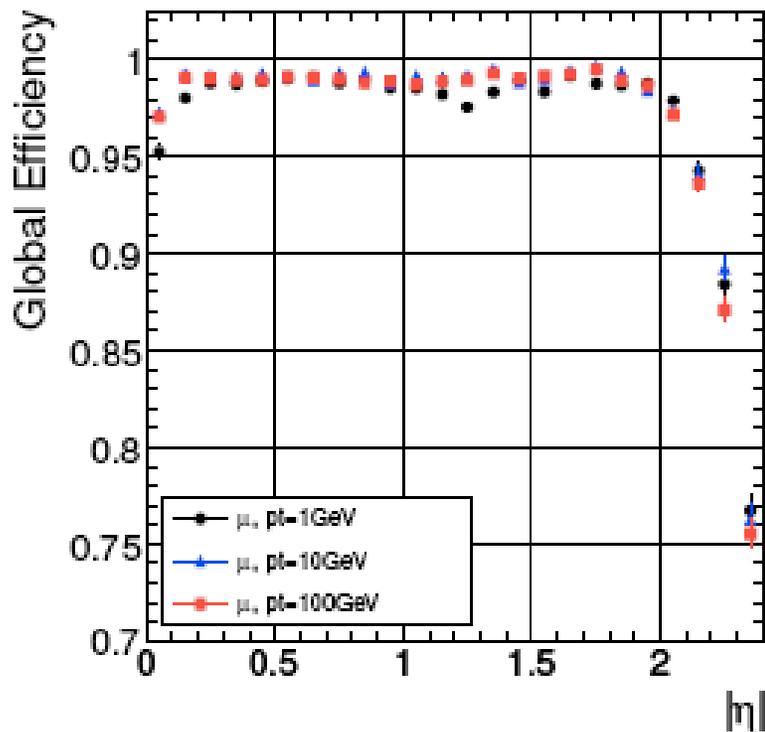
A la fin du processus, les paramètres de trace sont connus avec précision à la sortie du trajectographe, mais ils sont nettement moins précis au début de la trace.

Un nouvel ajustement est alors réitéré, en utilisant juste les hits de la trace mais cette fois ci en partant de l'extérieur vers l'intérieur.

Enfin, une procédure basée sur la méthode des moindres carrés, appelée lissage, permet d'obtenir la trajectoire avec les paramètres de trace par combinaison des deux ajustements intérieur/extérieur et extérieur/intérieur :

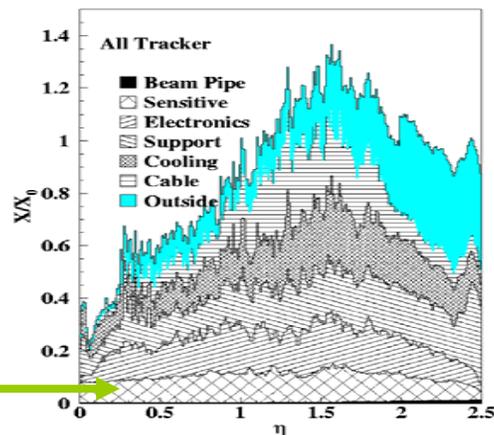
les paramètres sont ainsi connus de façon optimale pour tous les points de mesures.

Efficacité de la méthode de reconstruction



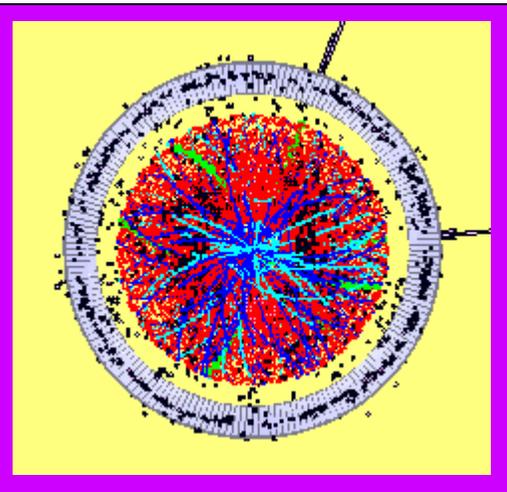
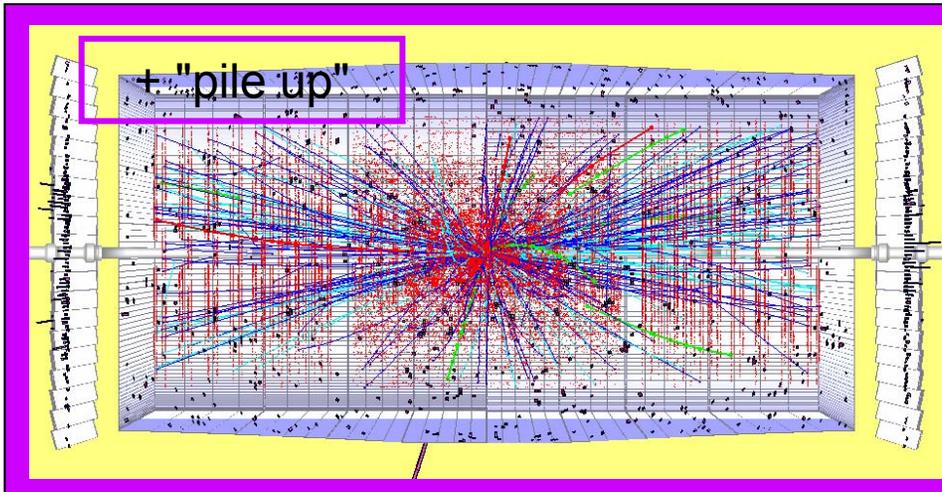
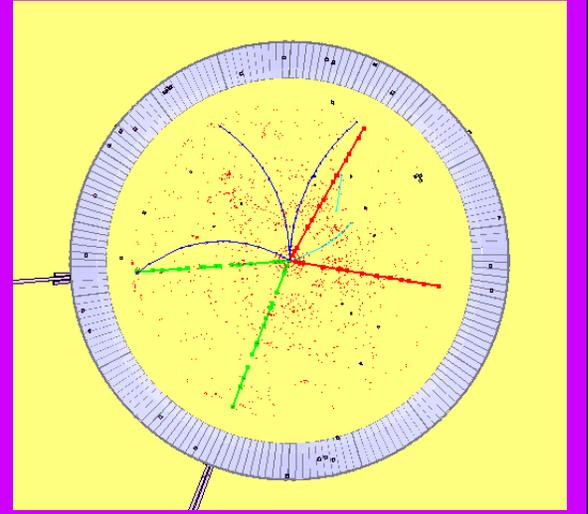
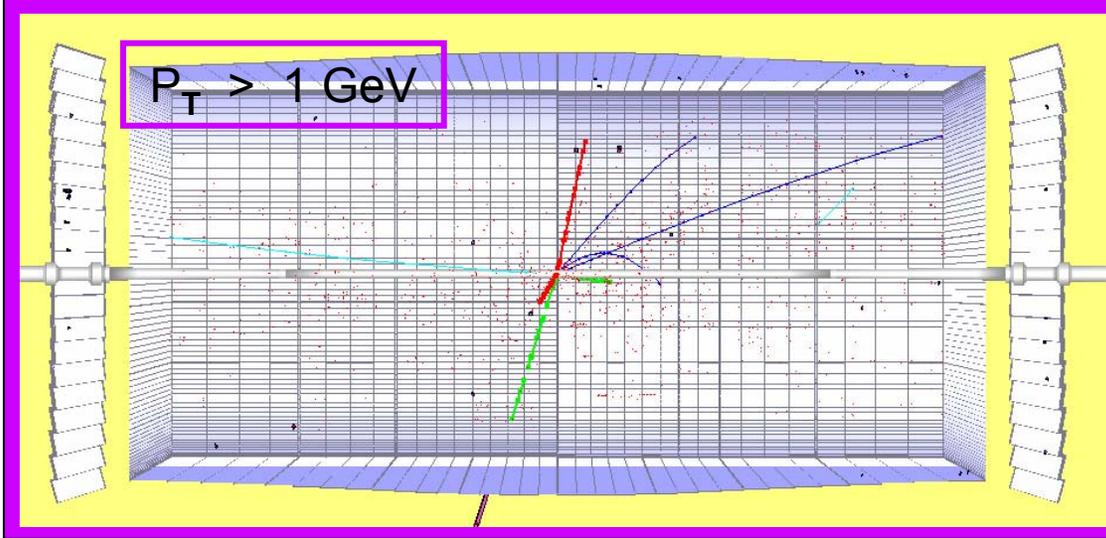
matière dans la trajectographe

Silicon sensors

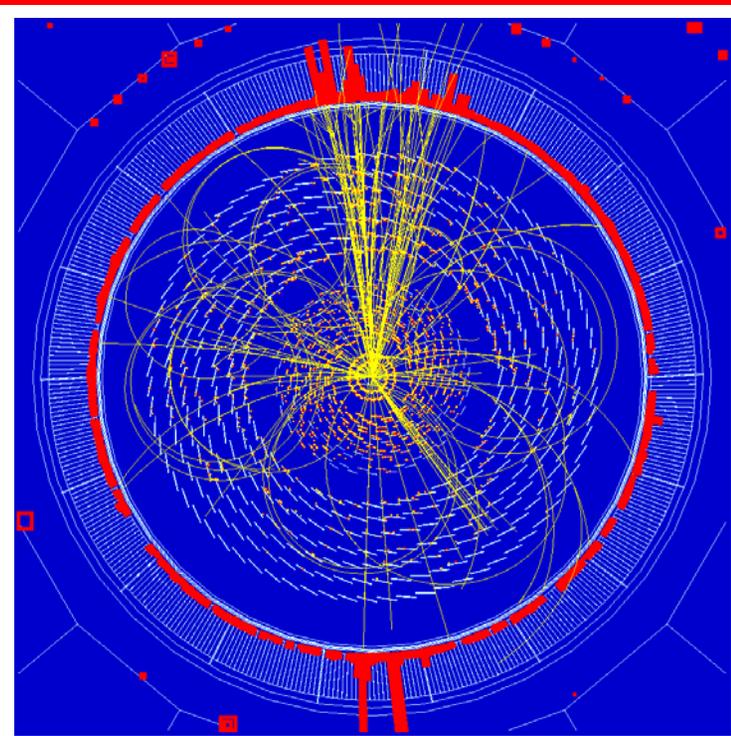
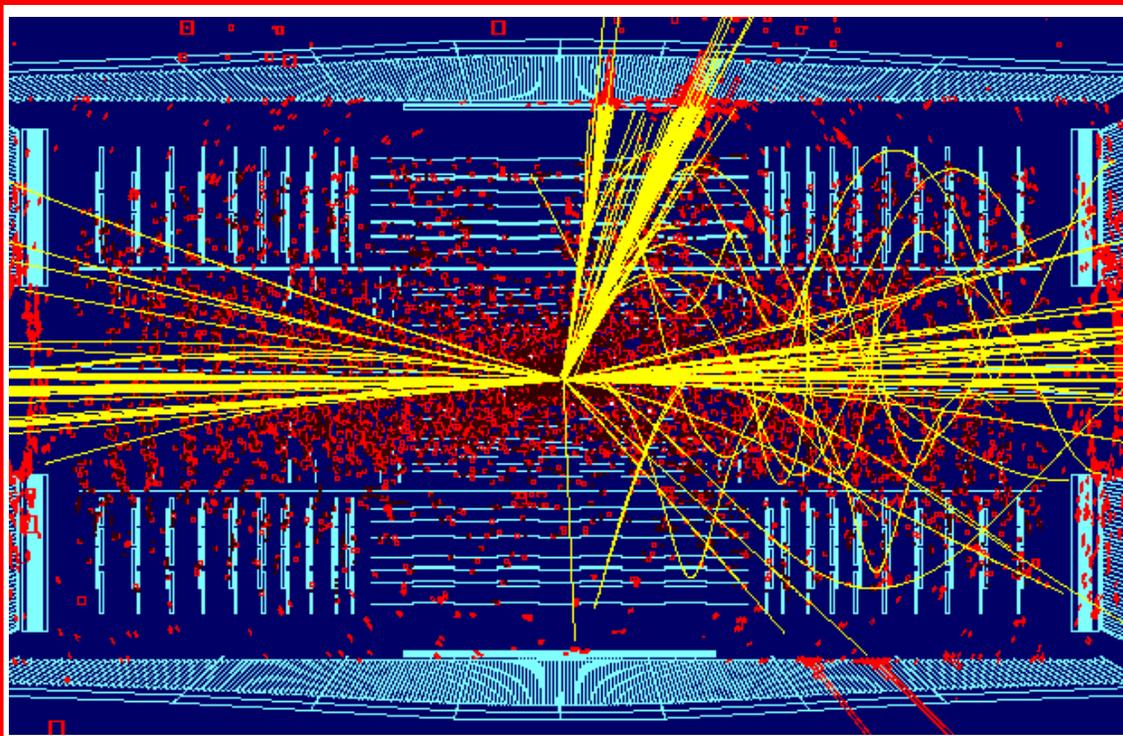


Exemples d'application du filtre de Kalman

$$H \rightarrow ZZ \rightarrow e^+ + e^- + \mu^+ + \mu^-$$

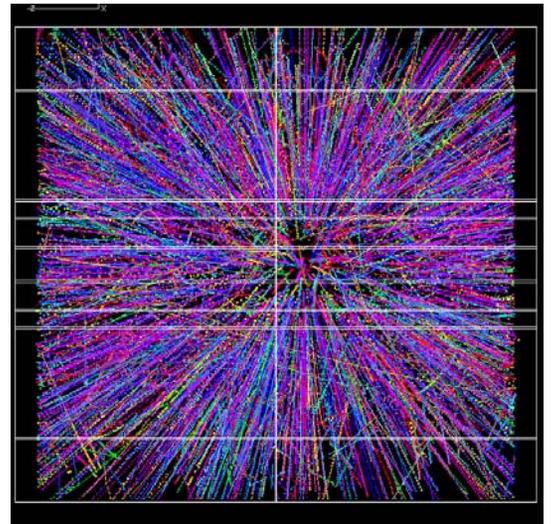
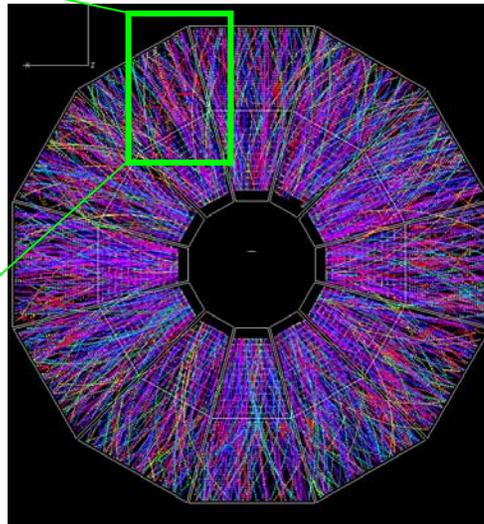
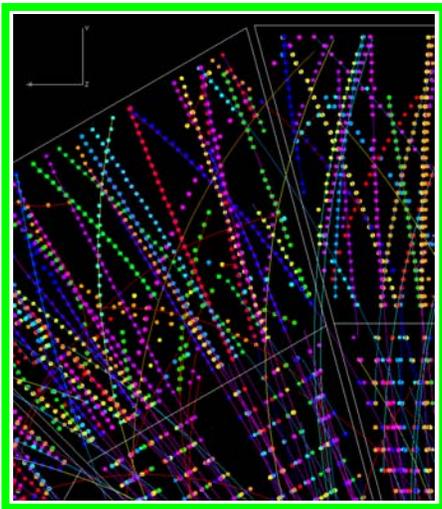
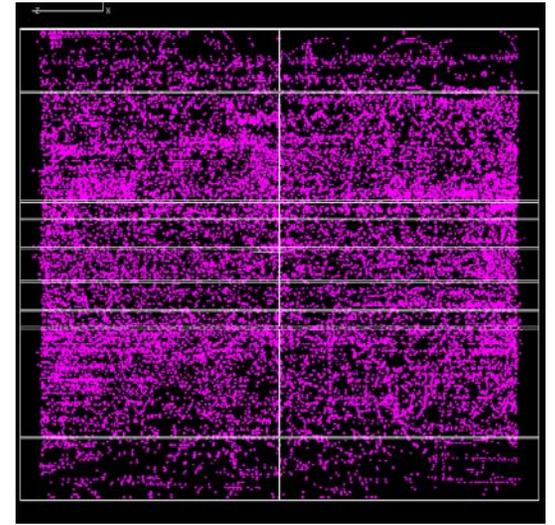
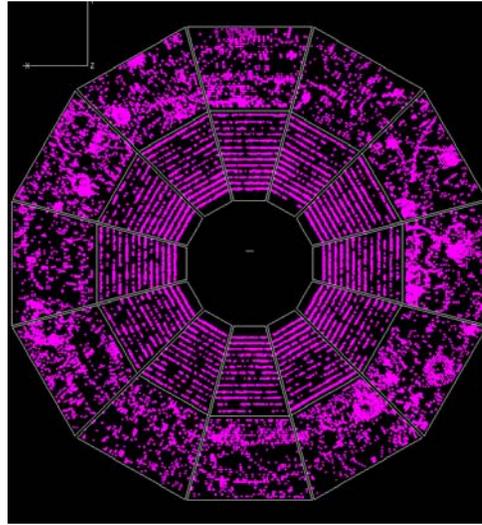
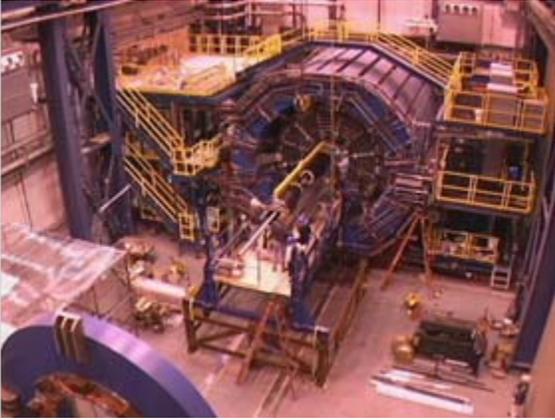


$$H (800\text{GeV}) \rightarrow ZZ \rightarrow j j e^+ e^-$$

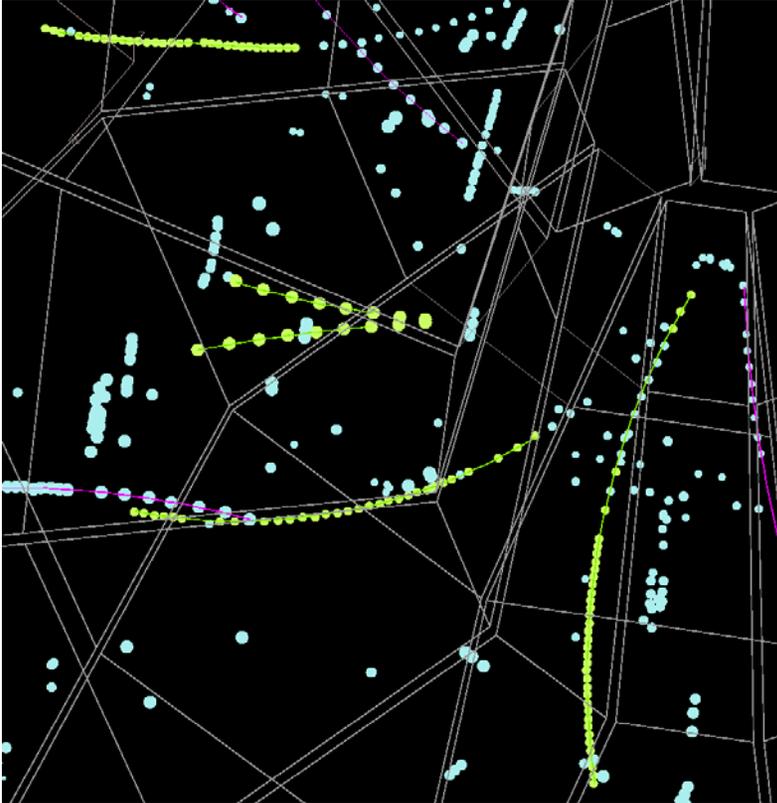


<http://pcbunn.cithec.caltech.edu/>

STAR



http://www.star.bnl.gov/STAR/imagelib/event_images/DSV_REALDATA1/



désintégration d'un baryon
étrange $\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$



Recherche de vertex

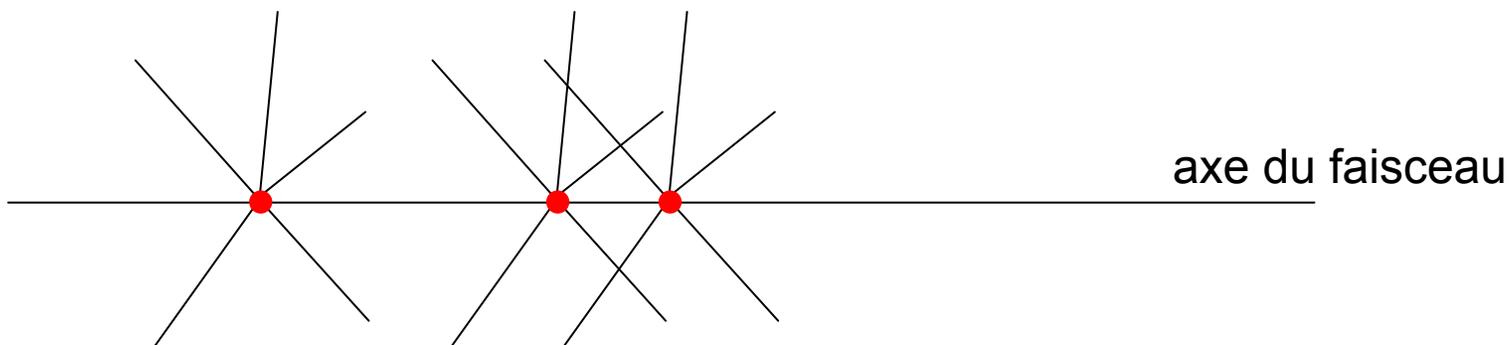
5. notion de vertexing

L'idée de base du vertexing est de savoir :

d'où vient la particule ?

Vertex primaire :

→ identification de la position de la collision (superposition d'événements)

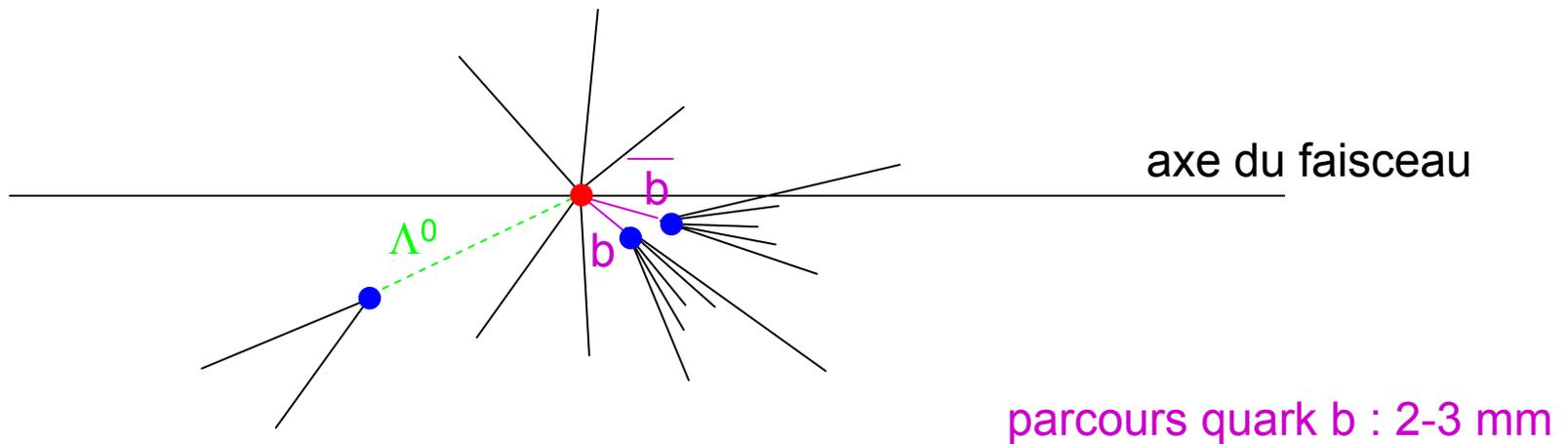


Vertex secondaire :

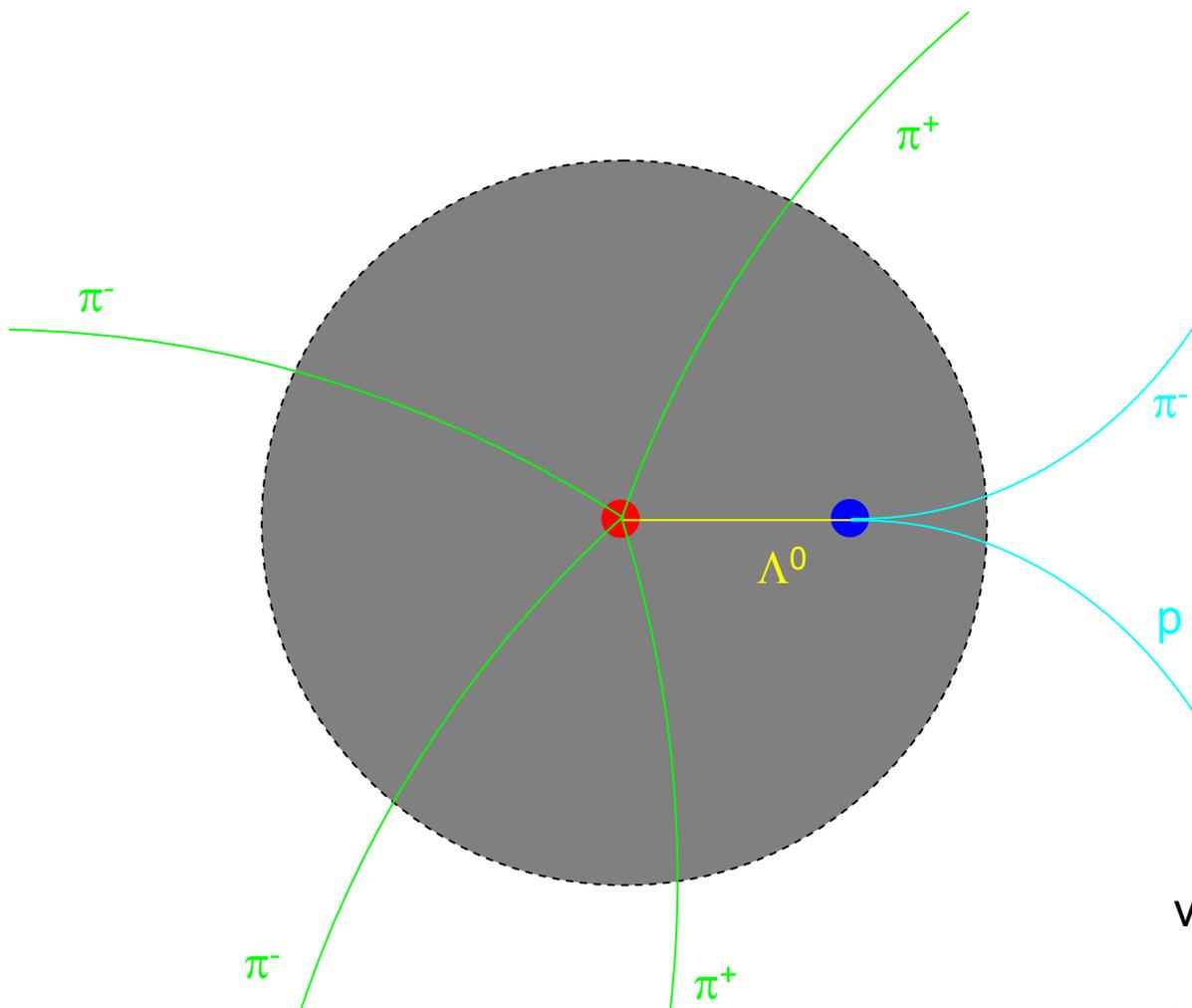
→ vertex de désintégration de particules

- * particules neutres

- * particules de durée de vie courte ayant donc un parcours trop petit permettre la reconstruction de la trace

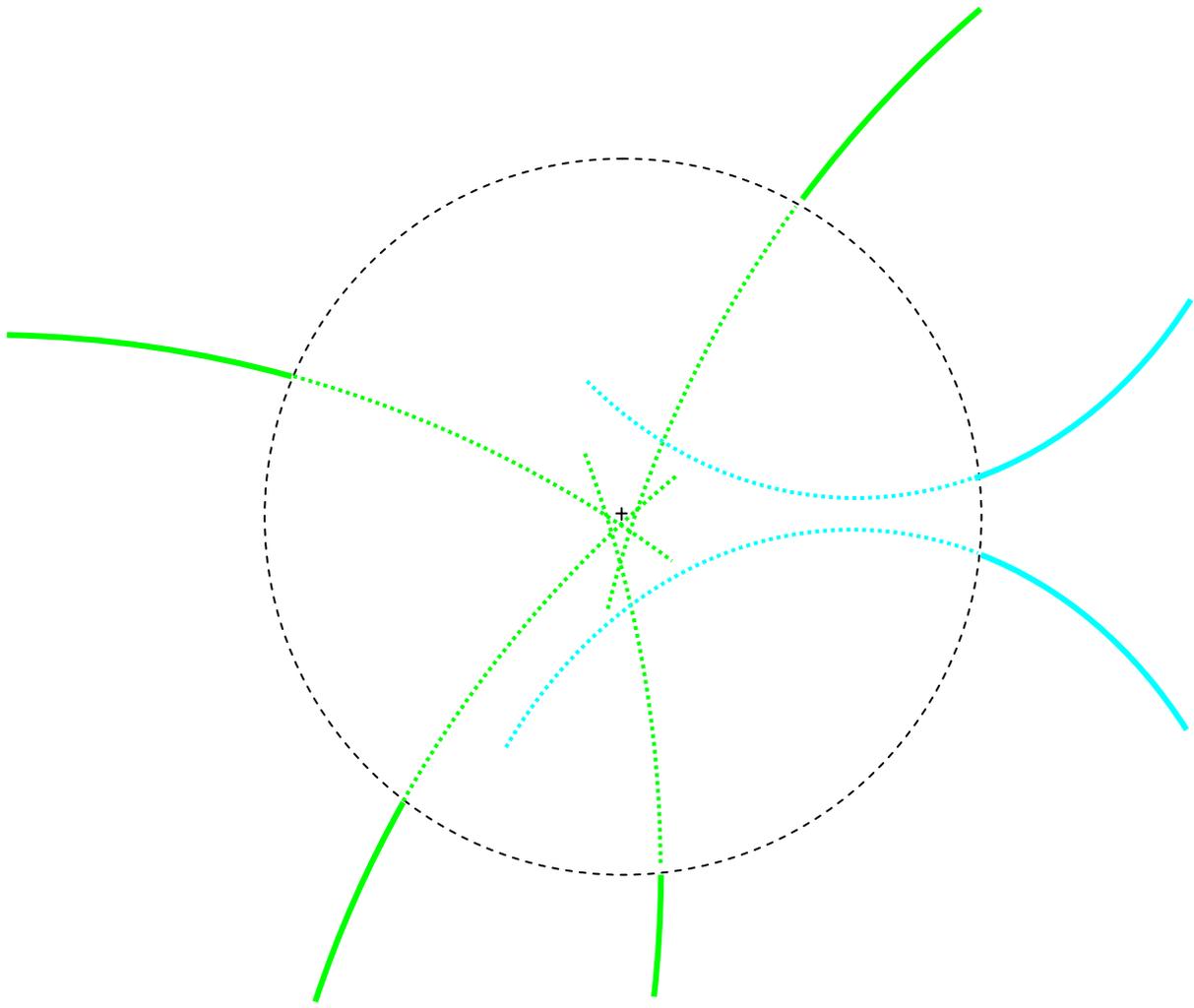


principe de recherches des vertex



vertex primaire : ●

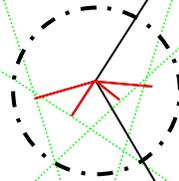
vertex secondaire : ●



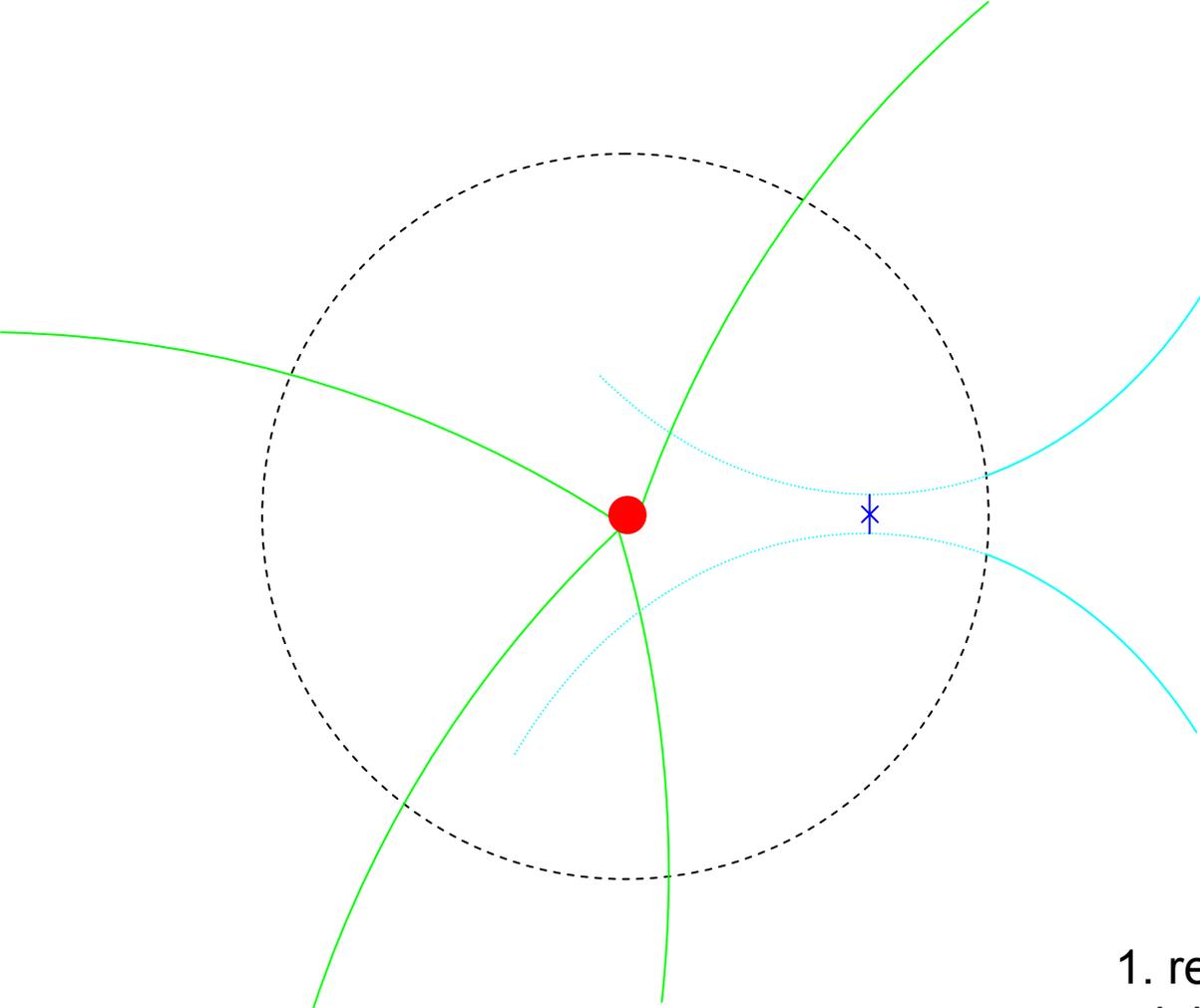
1. recherche du point
minimisant les distances

2. application d'un cut en
éliminant les plus
éloignées

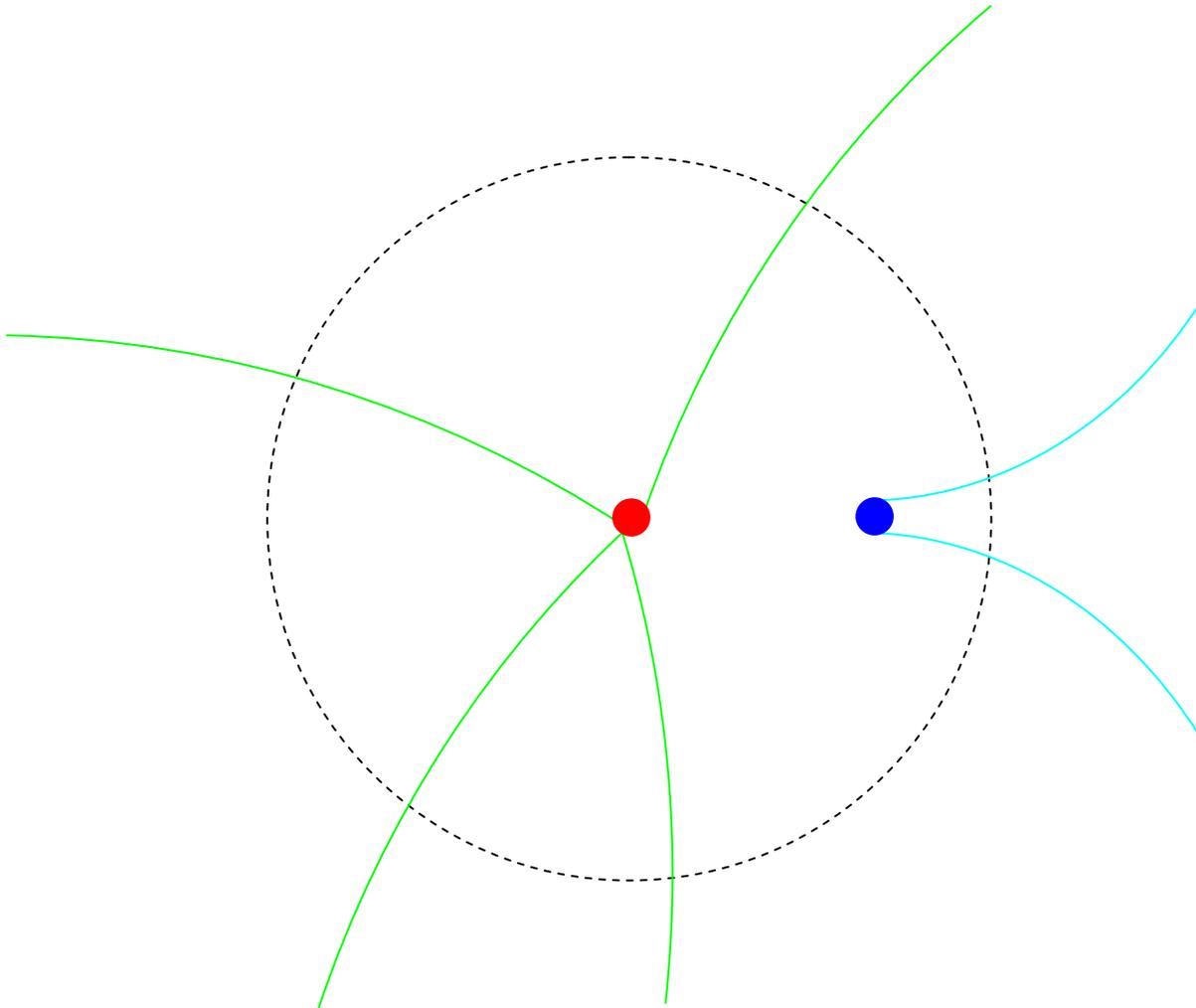
3. vertex primaire sur les
quatre trajectoires



vertex secondaire



1. recherche du point
minimisant les distances



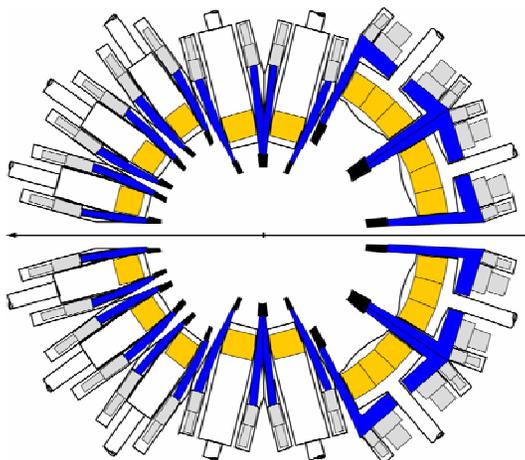
Reconstruction des trajectoires de rayonnement γ

Plan :

1. Introduction
2. Principe
3. Detecteur AGATA - Simulation d'évènements - GEANT
4. Méthode de reconstruction
 - clusterisation
 - filtre "tracking gamma"
5. Application

1. Introduction : Pourquoi faire du tracking γ

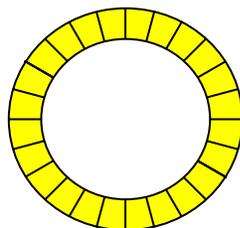
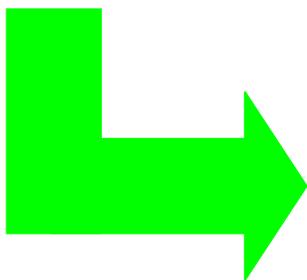
détecteur Ge avec système anti-Compton (BGO)



couverture angulaire de Ge (N=239) : 40 %



EUROBALL



AGATA

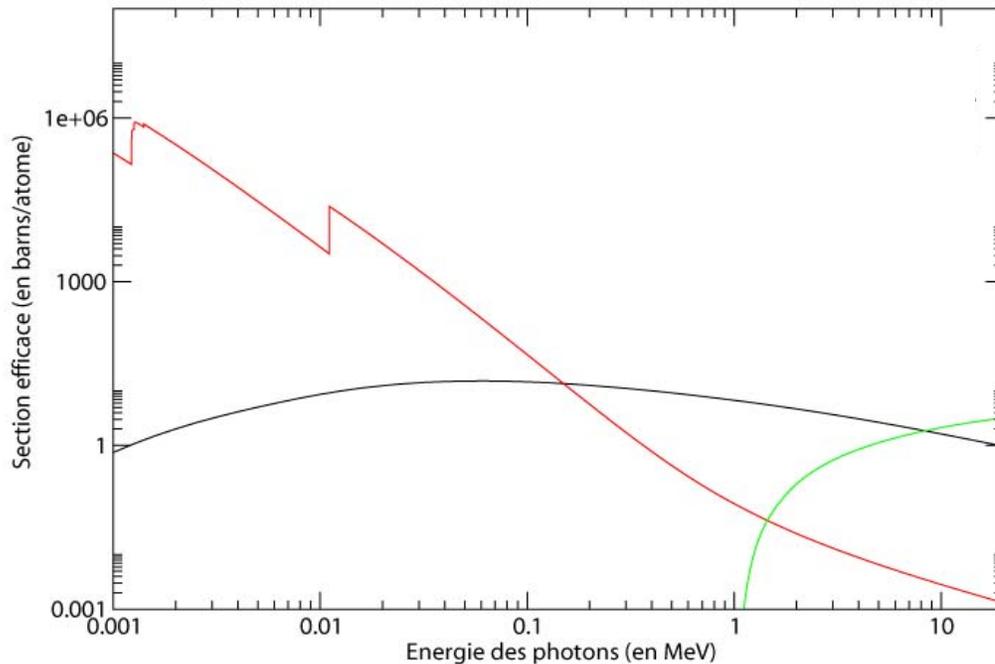
couverture angulaire de Ge (N=180) : 80 %



Besoin d'une alternative au système anti-Compton :

TRACKING γ

Rappel sur interaction d'un rayonnement avec la matière



Effet photoélectrique :

le photon cède la totalité de son énergie à un électron lié.

Effet Compton :

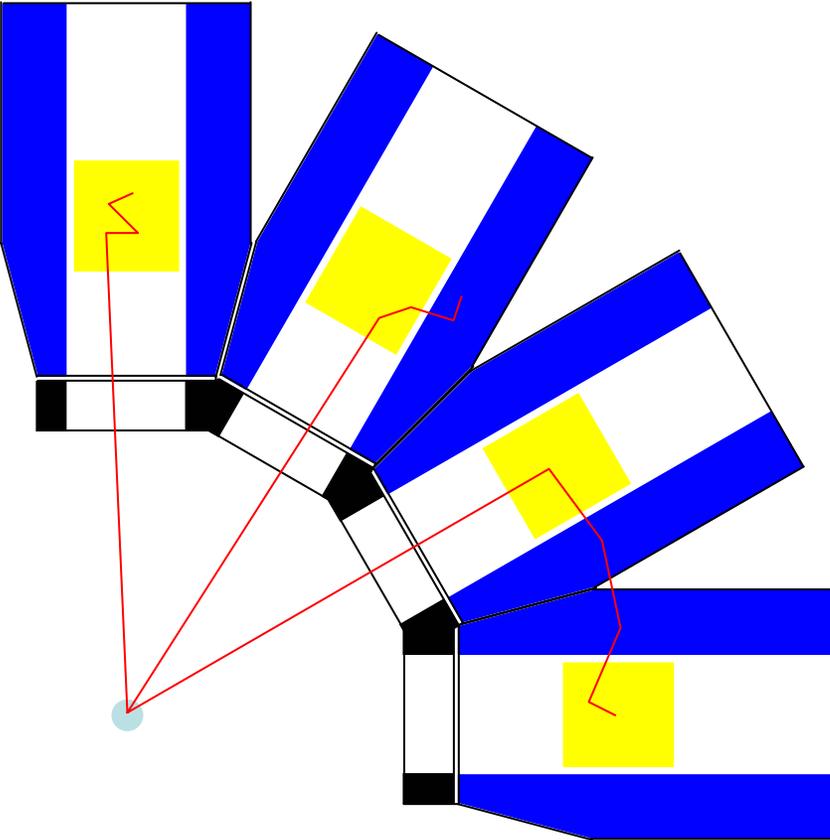
le photon fait une diffusion élastique sur un électron.

$$E\gamma' = \frac{E\gamma}{1 + \frac{E\gamma}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)}$$

Effet de création de paire :

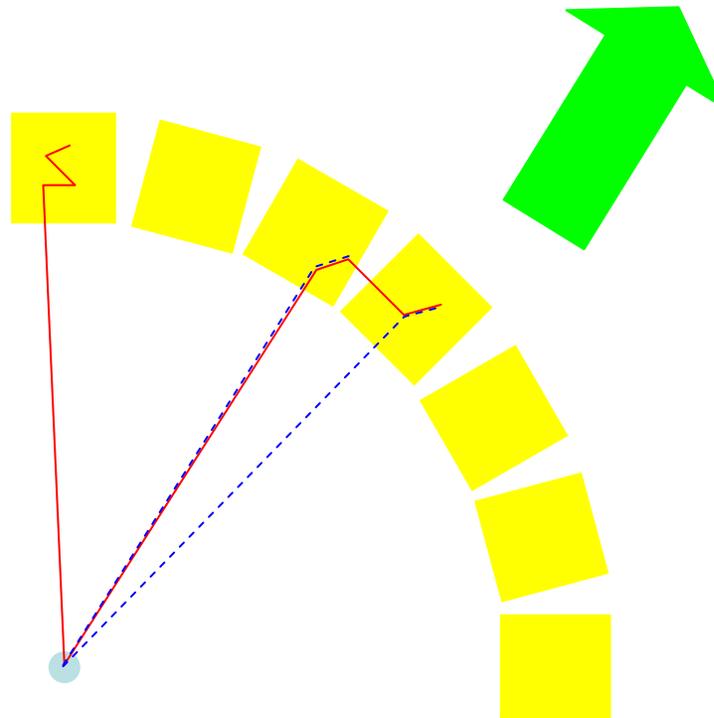
sous l'effet du champ électromagnétique du noyau, le photon se matérialise en une paire électron / positon.

Systeme anti-Compton

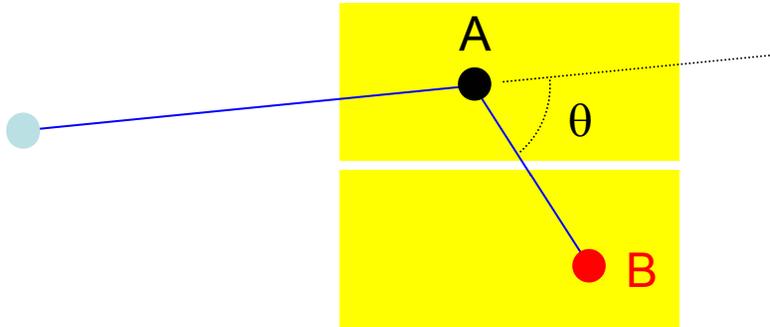


Suppression du système anti-Compton

reconstruction des trajectoires des γ
à partir des points d'interaction dans
les détecteurs Ge



2. principe



1^{er} point d'interaction

données : A (x_A, y_A, z_A, E_A)

1^{ère} interaction :

diffusion Compton :

$$E\gamma' = \frac{E\gamma}{1 + \frac{E\gamma}{m_e c^2}(1 - \cos\theta)}$$

avec $E\gamma' = E\gamma - E_A$

2^{ème} point d'interaction

données : B (x_B, y_B, z_B, E_B)

2^{ème} interaction :

effet photoélectrique

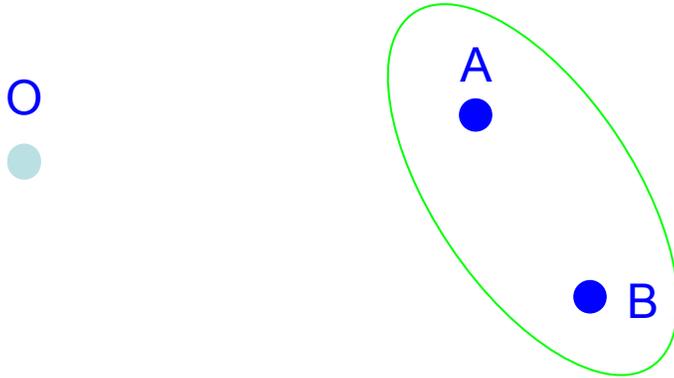
algorithme

1^{ère} étape : clusterisation

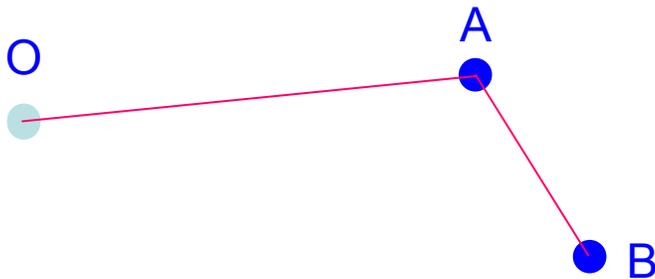
$$E_\gamma = E_A + E_B$$

2^{ème} étape :

pour chaque cluster,
détermination du chemin le
plus probable

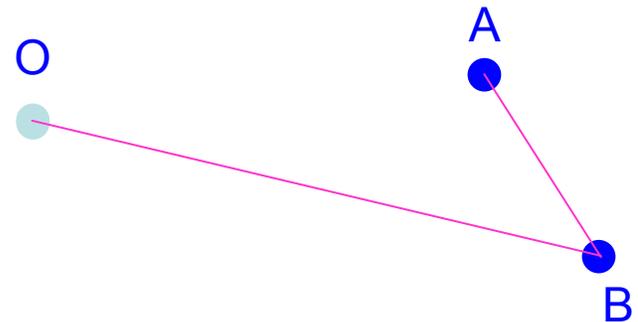


hypothèse 1



ou

hypothèse 2



calcul de l'angle de diffusion Compton :

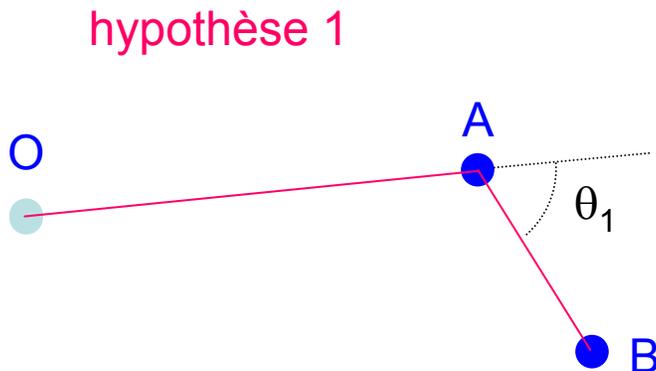
$$E_B = \frac{E_A + E_B}{1 + \frac{E_A + E_B}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)}$$

compare l'angle calculé θ avec l'angle géométrique θ_1

A.N. : $E_\gamma = 1 \text{ MeV}$

$\theta = 61^\circ$

$\theta_1 = 60^\circ$



calcul de l'angle de diffusion Compton :

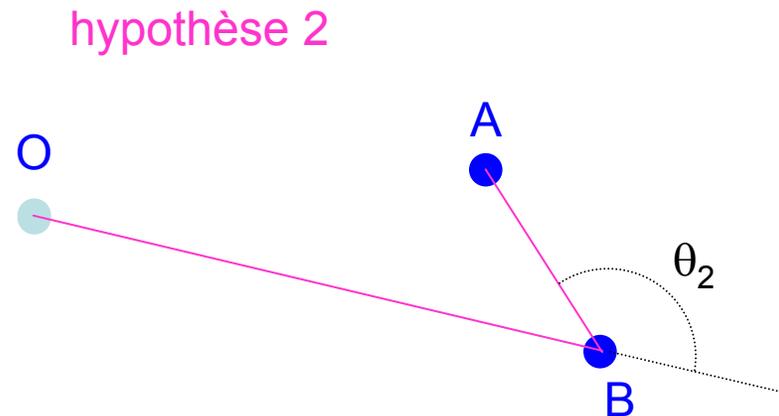
$$E_A = \frac{E_A + E_B}{1 + \frac{E_A + E_B}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)}$$

compare l'angle calculé θ avec l'angle géométrique θ_2

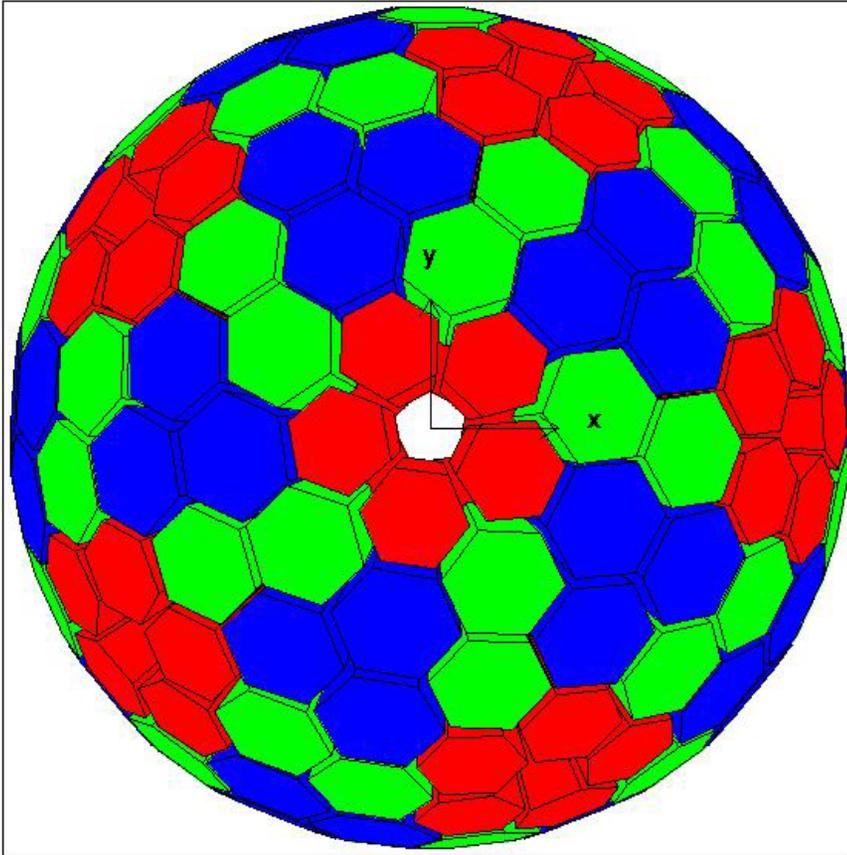
$E_A = 0.5 \text{ MeV}$ et $E_B = 0.5 \text{ MeV}$

$\theta = 61^\circ$

$\theta_2 = 140^\circ$



3. simulation GEANT d'AGATA



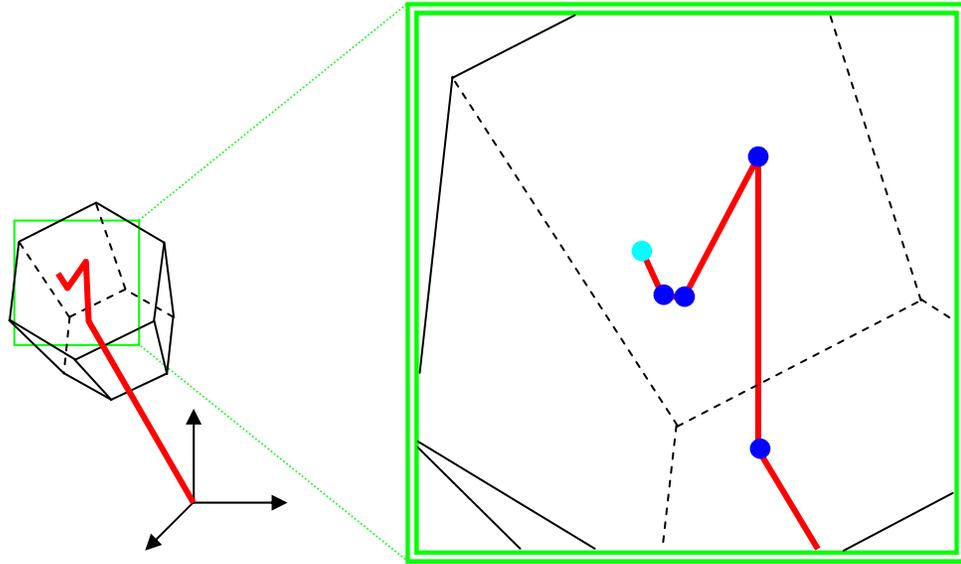
description géométrique d'AGATA :

Le détecteur est constitué de 180 cristaux hexagonaux en germanium de 3 tailles différentes.

évènement simple : $\gamma = 1\text{MeV}$

un seul cristal

absorption totale

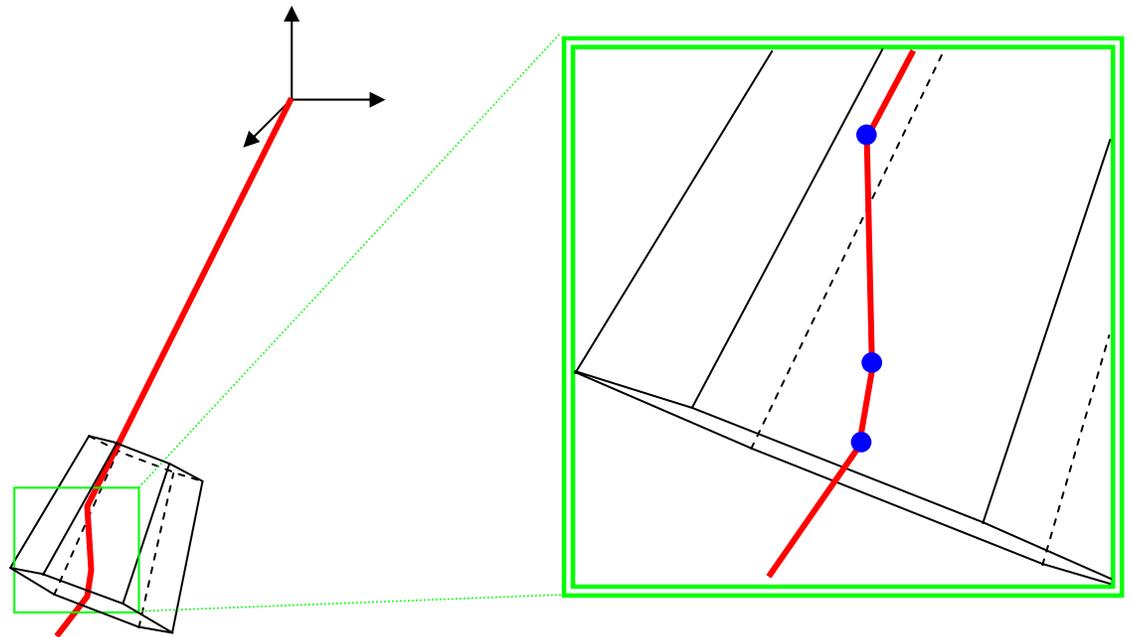


- diffusion Compton
- effet photoélectrique

évènement : $\gamma = 1\text{MeV}$

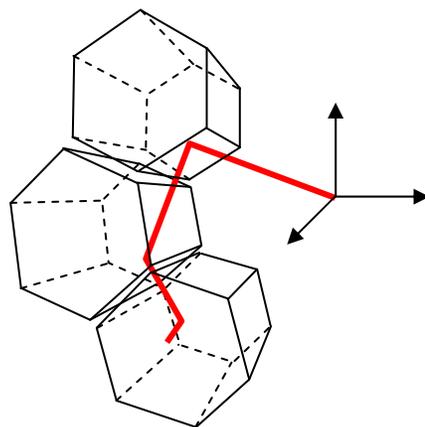
diffusion hors du détecteur

- diffusion Compton
- effet photoélectrique



évènement : $\gamma = 1\text{MeV}$

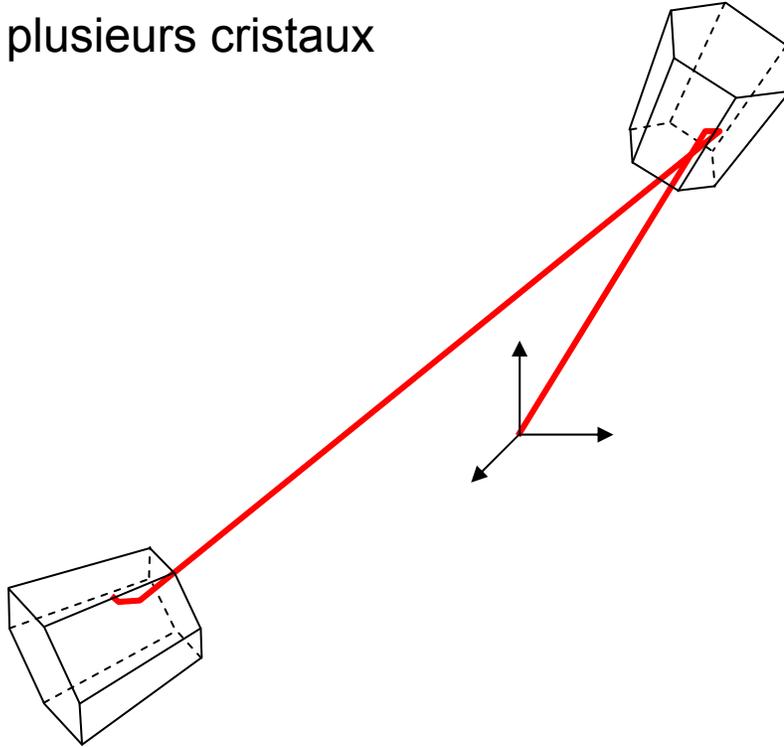
diffusion dans plusieurs cristaux
regroupés



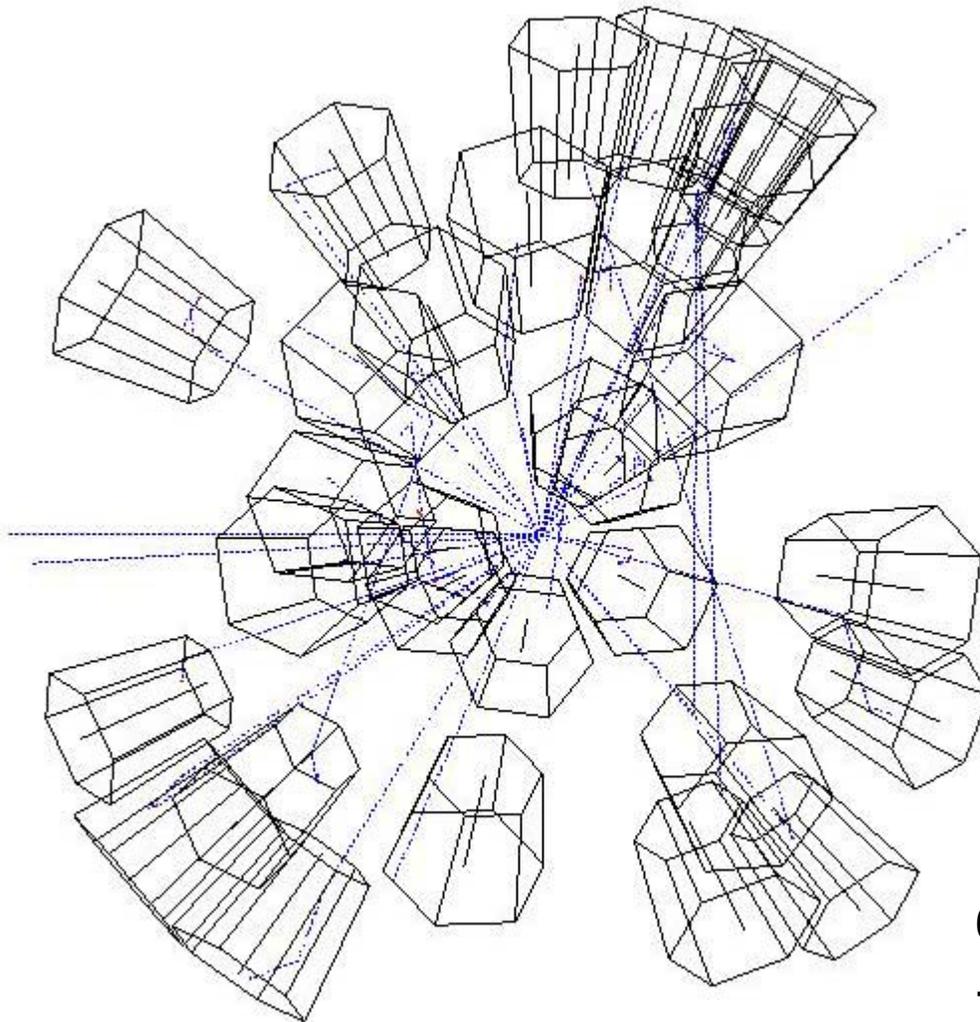
évènement : $\gamma = 1\text{MeV}$

backscattering :

diffusion dans plusieurs cristaux
éloignés



Evènement proche de la réalité :
multiplicité 30 γ de 1MeV

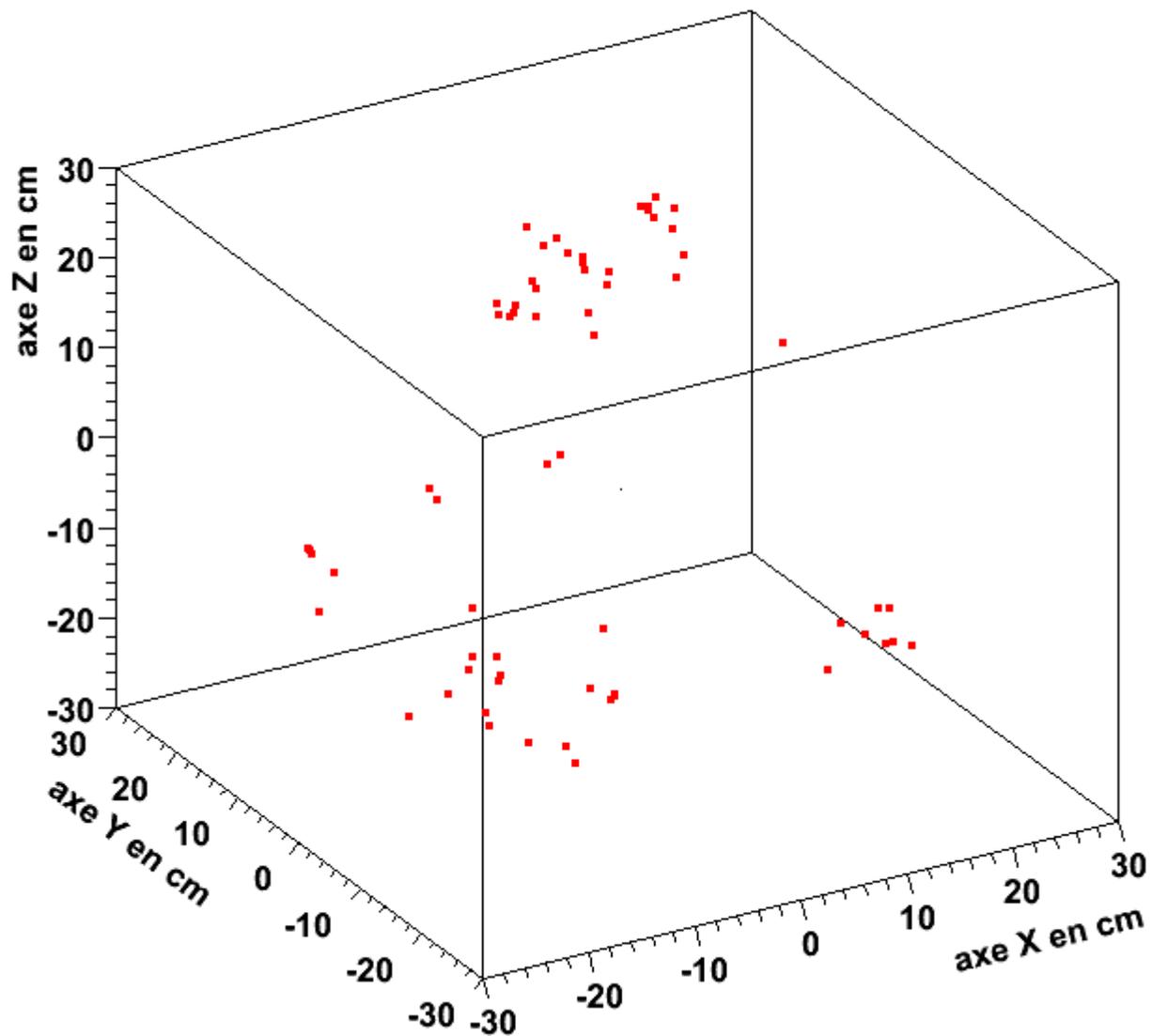


6 γ sans interaction

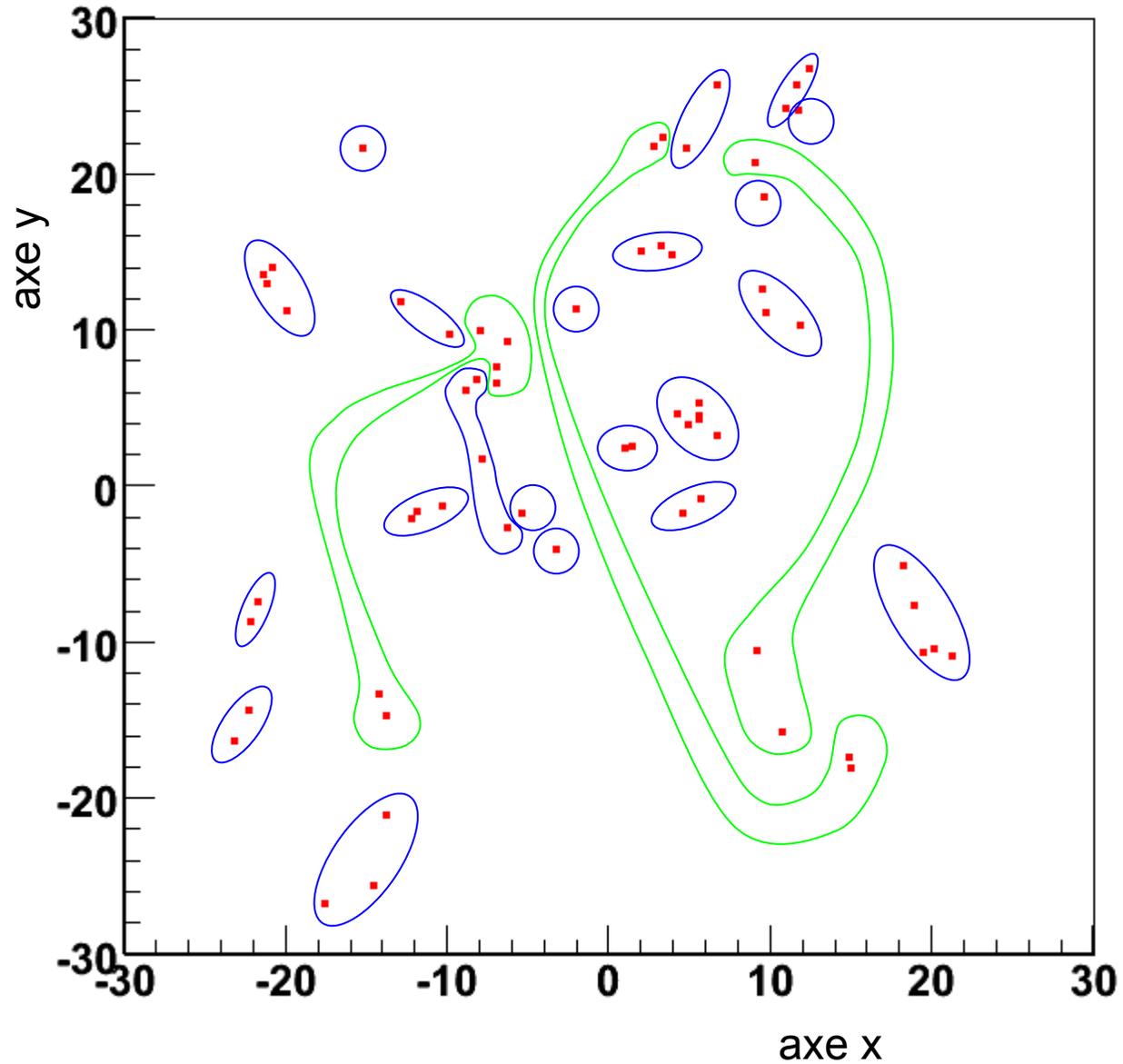
7 γ sans absorption totale

3 γ avec diffusion importante

position des interactions (66) dans le détecteur.



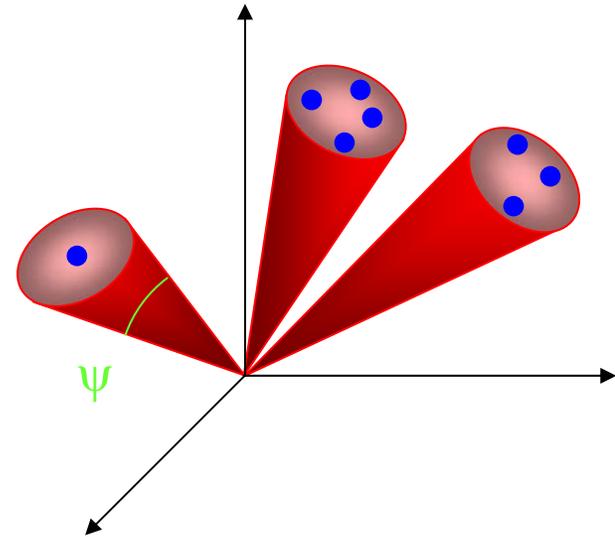
projection sur le plan (x,y).



4. Méthode de reconstruction :

1^{ère} étape : clusterisation (1)

Méthode des cônes

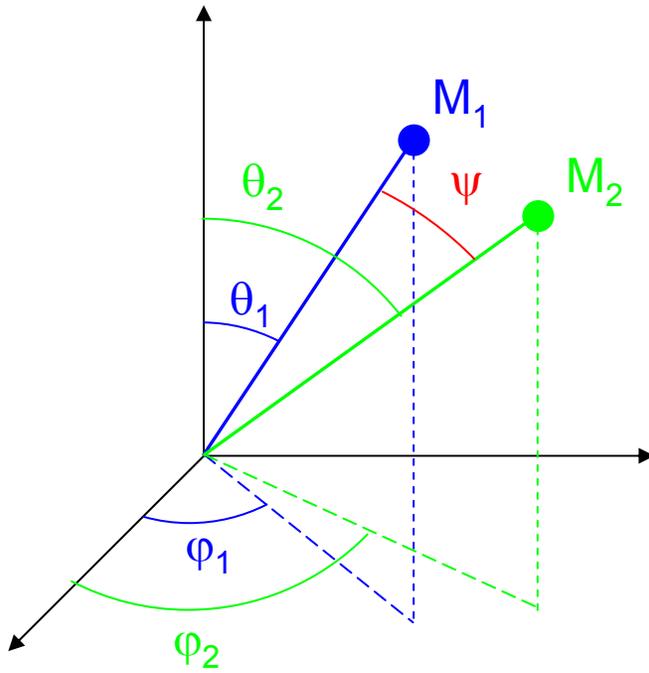


1^{ère} étape : initialisation

- * angle d'ouverture : ψ
- * flag les points à 0

2^{ème} étape : recherche du premier cluster

- * énergie du cluster = 0
- * nombre de points dans le cluster = 0

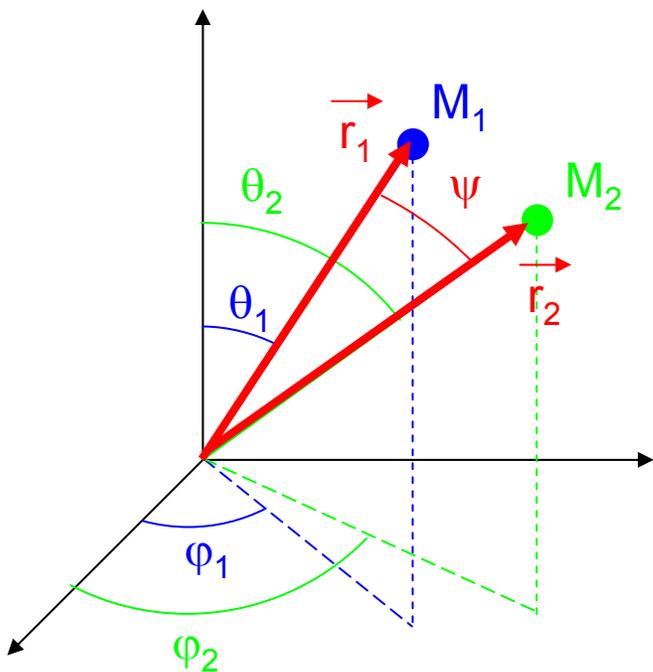


Premier point avec flag = 0

- . énergie du cluster = énergie du point
- . flag du point = numéro du cluster = 1
- . nombre de point dans le cluster 1 = 1

Second point avec flag = 0

Recherche de l'angle ψ



$M_1 :$

$$x_1 = r_1 \sin \theta_1 \cos \varphi_1$$

$$y_1 = r_1 \sin \theta_1 \sin \varphi_1$$

$$z_1 = r_1 \cos \theta_1$$

$M_2 :$

$$x_2 = r_2 \sin \theta_2 \cos \varphi_2$$

$$y_2 = r_2 \sin \theta_2 \sin \varphi_2$$

$$z_2 = r_2 \cos \theta_2$$

$$\cos \psi = \frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2}{r_1 r_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{r_1 r_2}$$

$$= \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Si $\psi < \text{angle d'ouverture du c\^one}$:

⇒ Energie du cluster devient : $\text{\'energie pr\'ecedente} + \text{\'energie du point}$

⇒ flag le point au num\'ero du cluster

⇒ incr\'ementation du nombre d'interactions dans le cluster

point suivant ayant flag = 0

et ainsi de suite

⇒ cluster (\'energie + nombre d'interactions)
flag : num\'ero du cluster

puis, cluster suivant

4. Méthode de reconstruction :

Etape de clusterisation (2)

Autre méthode :

Recuit Déterministe / *Deterministic Annealing Filter (DAF)*

Cette approche de clusterisation est basée sur des méthodes de physique statistique.

Il s'agit de trouver la distribution des probabilités d'association des hits avec les différents clusters.

Phys. Rev. Lett. 65 (1990) 945.

Soit un ensemble de N points (vecteurs des entrées)

$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$$

$$\text{avec } v_i \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}$$

clusterisation : l'association de chaque point à un cluster.

Soit un ensemble de n prototypes (centres des clusters)

$$C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$$

$$\text{avec } c_i \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \\ \delta_i \end{pmatrix}$$

centre du cluster : le point minimisant la somme des distances de tous les éléments de l'amas au prototype associé.

Distorsion entre les points et les prototypes

$$D = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^N p(v_i, c_j) d(v_i, c_j)$$

où $p(v_i, c_j)$ probabilité qu'un point appartienne à un cluster

et $d(v_i, c_j)$ distance euclidienne

$$d(v_i, c_j) = (x_i - \alpha_j)^2 + (y_i - \beta_j)^2 + (z_i - \delta_j)^2$$

But : trouver les minima de la fonction D
avec le minimum de prototypes.

Dans un cadre purement probabiliste :

$$p(v_i, c_j) = p(v_i) \cdot p(c_j / v_i)$$

où $p(c_j / v_i)$ probabilité d'associer un prototype à un point

$$D = \sum_{i=1}^N p(v_i) \sum_{j=1}^n p(c_j / v_i) \cdot d(v_i, c_j)$$

comme $p(v_i) = \frac{1}{N}$

$$D = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n p(c_j / v_i) \cdot d(v_i, c_j)$$

Analogie avec la physique statistique : ENTROPIE

par définition $S = - p \cdot \ln(p)$

d'où

$$S(C/V) = - \sum_{i=1}^N p(v_i) \sum_{j=1}^n p(c_j / v_i) \cdot \ln[p(c_j / v_i)]$$

Analogie avec la physique statistique : ENERGIE LIBRE

$$F = D - T S$$

$$F = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n p(c_j / v_i) \cdot d(v_i, c_j) + \frac{T}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n p(c_j / v_i) \cdot \ln[p(c_j / v_i)]$$

La partition optimale correspond à la minimisation du Lagrangien F

La méthode du recuit déterministe : minimiser F en diminuant T

1. minimisation par rapport à la probabilité d'association :

$$p(c_j / v_i) = \frac{p(c_j) \cdot \exp\left[-\frac{d(v_i, c_j)}{T}\right]}{\sum_{j=1}^n p(c_j) \cdot \exp\left[-\frac{d(v_i, c_j)}{T}\right]} \quad \text{avec} \quad p(c_j) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p(c_j / v_i)$$

2. minimisation par rapport à la position des prototypes :

$$c_j = \frac{\sum_{i=1}^N v_i \cdot p(c_j / v_i)}{\sum_{i=1}^N p(c_j / v_i)}$$

En pratique, la méthode consiste, à partir d'une température élevée, de trouver l'ensemble des prototypes minimisant le Lagrangien F au fur et à mesure que la température décroît.

A température infinie, les probabilités d'association sont uniformes

⇒ tous les prototypes sont indifférenciés

⇒ le processus démarre donc avec un seul prototype placé au centre de la distribution.

A mesure que T diminue, les distributions deviennent de plus en plus discriminantes. Le système peut alors passer une transition de phase qui consiste à une scission du cluster en deux parties (bifurcation du prototype).

Condition de transition de phase

Un prototype subit une transition de phase lorsque la température atteint une valeur critique : $2 \lambda_{\max}$.

λ_{\max} est la plus grande valeur propre de la matrice de covariance :

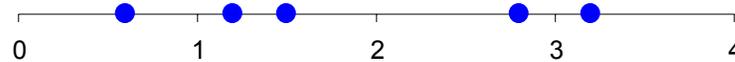
$$\text{cov}_{v/c_j} = \sum_{i=1}^N p(v_i / c_j) \cdot (v_i - c_j) \otimes (v_i - c_j)^T$$

$$\text{avec } p(v_i / c_j) = \frac{p(c_j / v_i) \cdot p(v_i)}{p(c_j)}$$

Le vecteur propre associé à $\lambda_{\max} \Rightarrow$ la direction du plus grand étirement de la distribution.

ALGORITHME

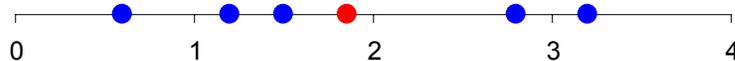
ensemble de 5 points (1 dim.) $V = \{x_i\} = \{0.6, 1.2, 1.5, 2.8, 3.2\}$



Conditions initiales : $T \infty$

\Rightarrow 1 prototype

$$\alpha_1 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad \text{et} \quad p(\alpha_1 / x_i) = 1$$



recherche de la position du prototype à T

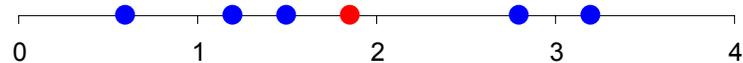
$$p(\alpha_1 / x_i) = \frac{p^{[0]}(\alpha_1) \cdot \exp\left[-\frac{(x_i - \alpha_1^{[0]})^2}{T}\right]}{\sum_{j=1}^n p^{[0]}(\alpha_1) \cdot \exp\left[-\frac{(x_i - \alpha_1^{[0]})^2}{T}\right]}$$

$$p^{[1]}(\alpha_1) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p(\alpha_1 / x_i)$$
$$\alpha_1^{[1]} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i \cdot p(\alpha_1 / x_i)}{\sum_{i=1}^N p(\alpha_1 / x_i)}$$

test de convergence :

itération (k) $\rightarrow \alpha_1^{[k]} - \alpha_1^{[k-1]} < \varepsilon$

$$T = 4 \quad \alpha_1 = 1.86$$



test de la transition de phase

$$\lambda_{\max} = \text{COV}_{x/c_1} = \sum_{i=1}^N p(x_i / c_1) \cdot (x_i - \alpha_1)^2$$

$$2 \lambda_{\max} = 1.93 < T = 4 \quad (\text{température critique non atteinte})$$

refroidissement $T \rightarrow a T$ ($a < 1$)

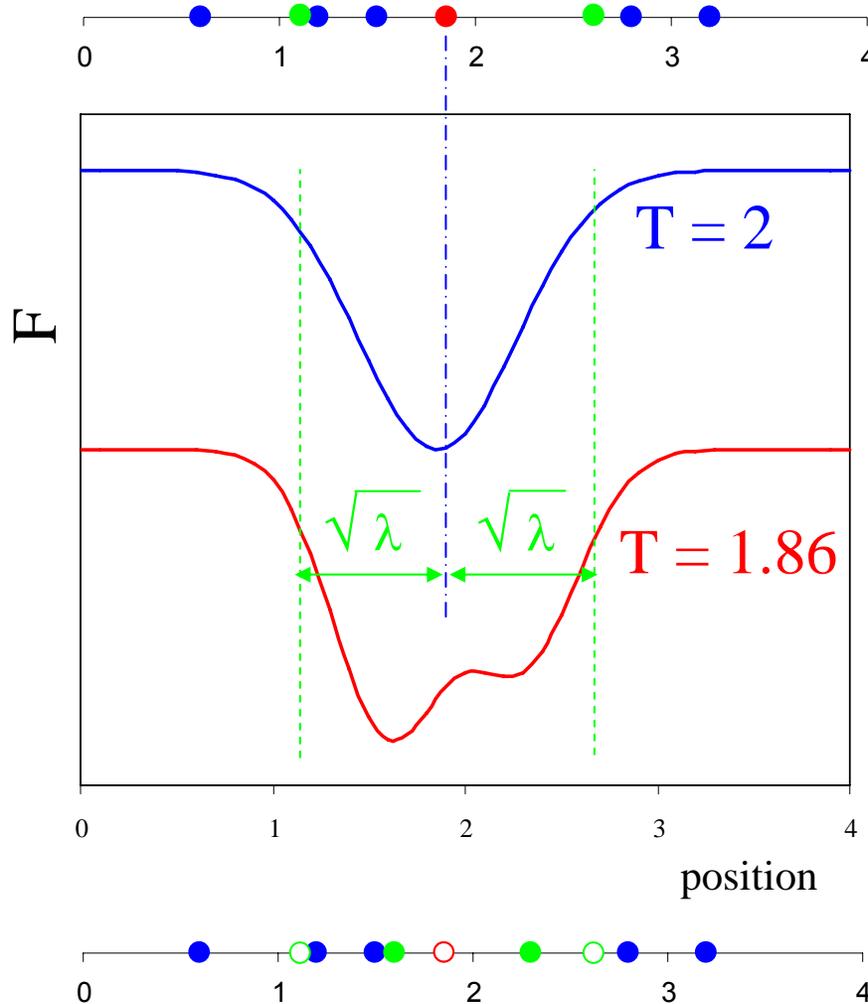
$$T = 1.85 \quad \alpha_1 = 1.86$$

$$2 \lambda_{\max} = 1.93 > T = 1.85 \quad (\text{température critique atteinte})$$

\Rightarrow *bifurcation du prototype*

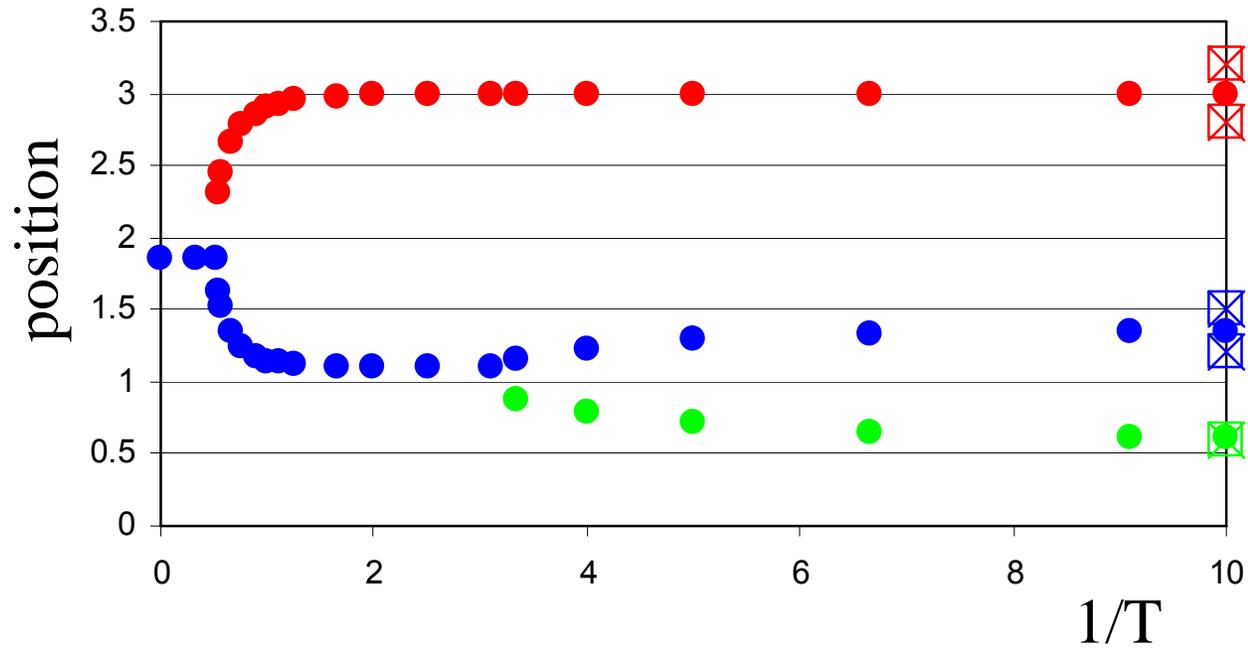
Introduction d'un nouveau prototype

$$\alpha_2^{[0]} = \alpha_1 + \sqrt{\lambda}$$
$$\alpha_1^{[0]} \rightarrow \alpha_1 - \sqrt{\lambda}$$



suite de l'algorithme

1. convergence position des prototypes
2. test transition de phase pour chaque prototype
3. refroidissement

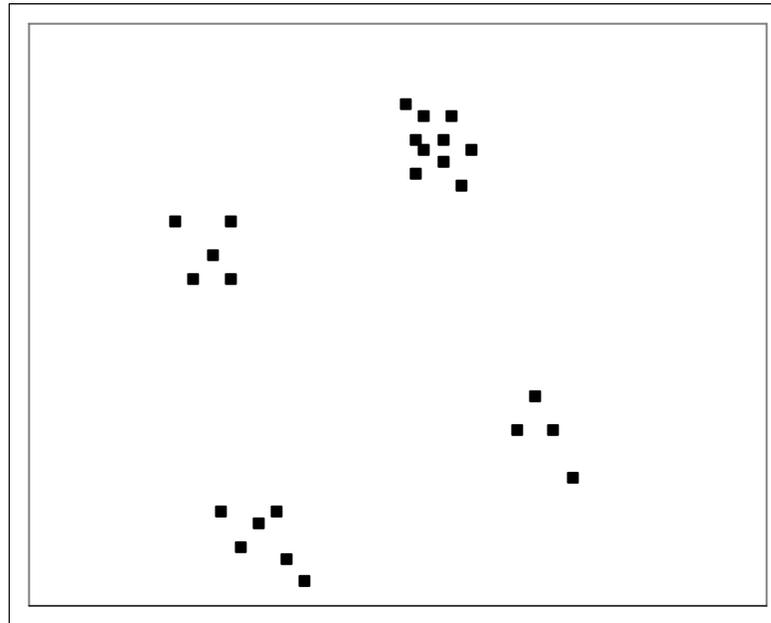


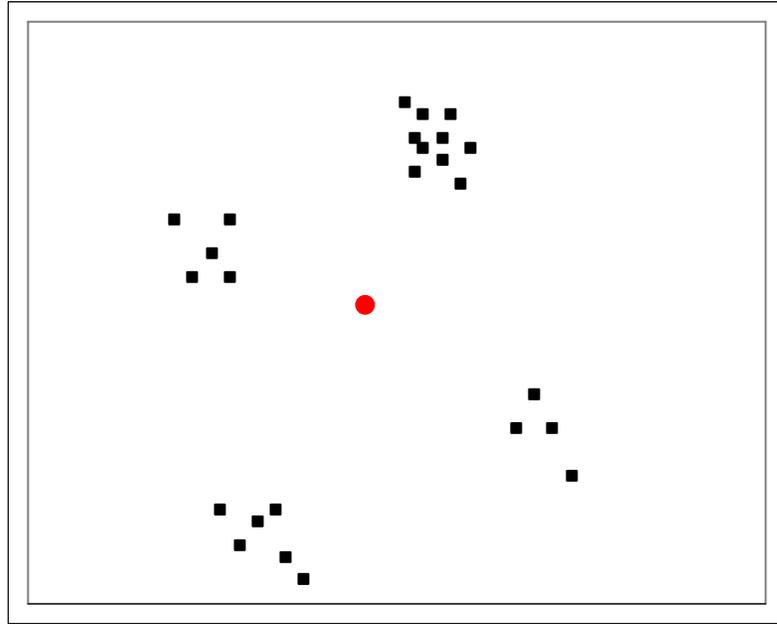
Paramètres de la méthode :

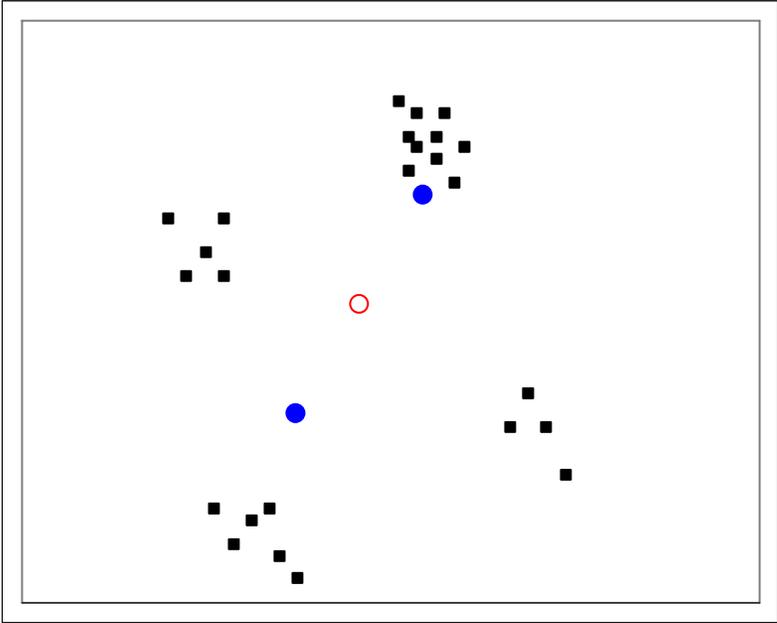
* taux de refroidissement

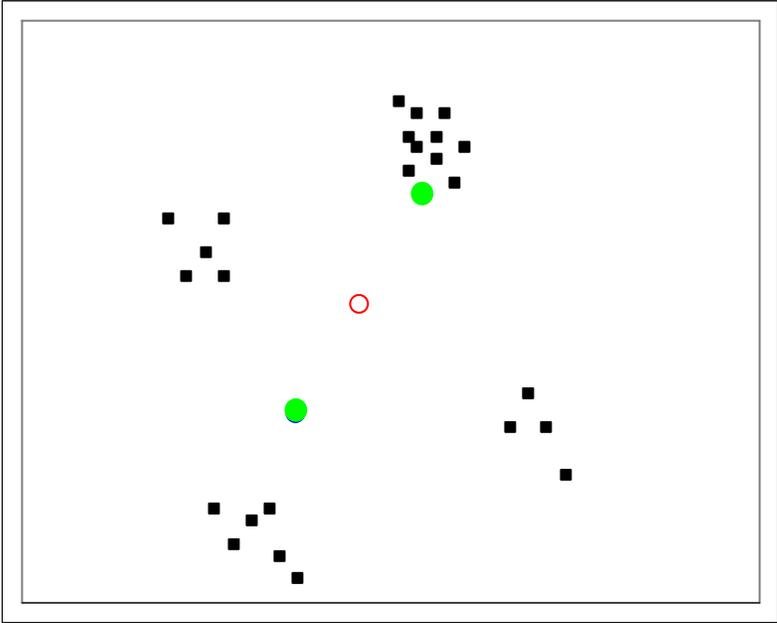
* T d'arrêt

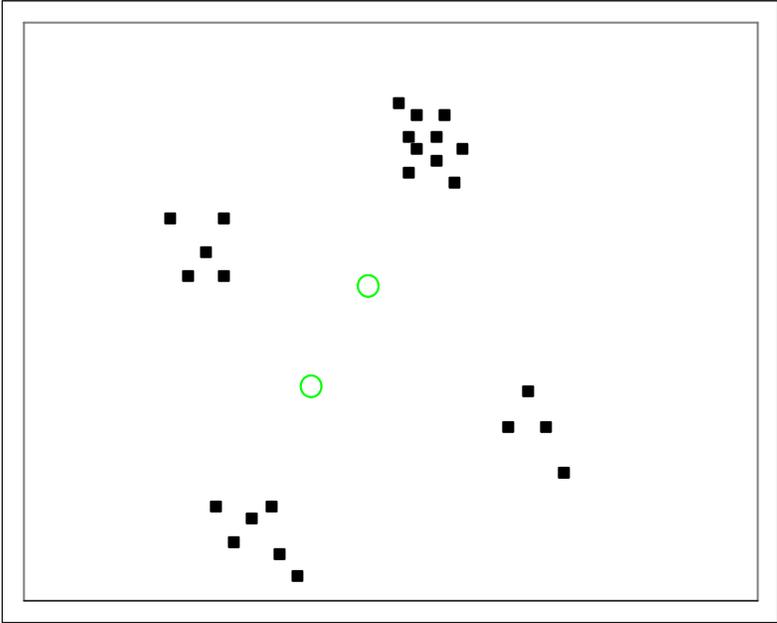
Illustration du processus de recuit déterministe

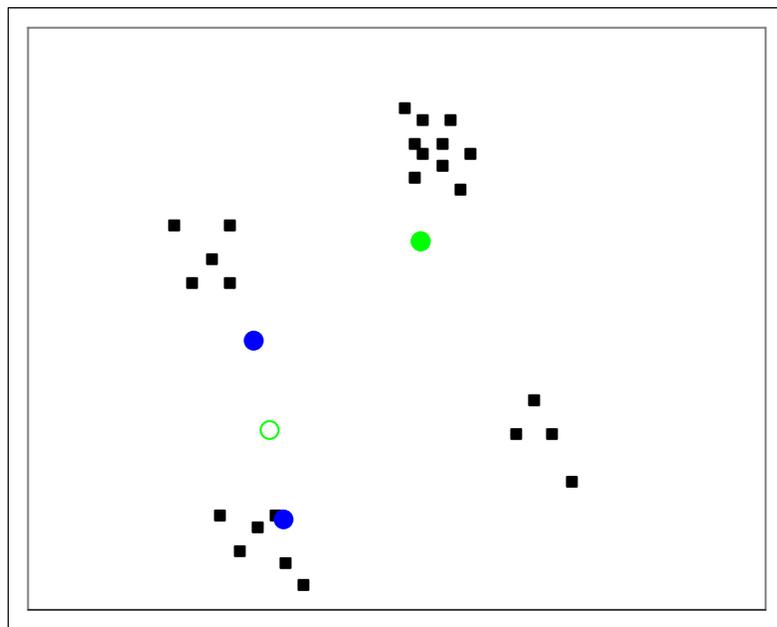


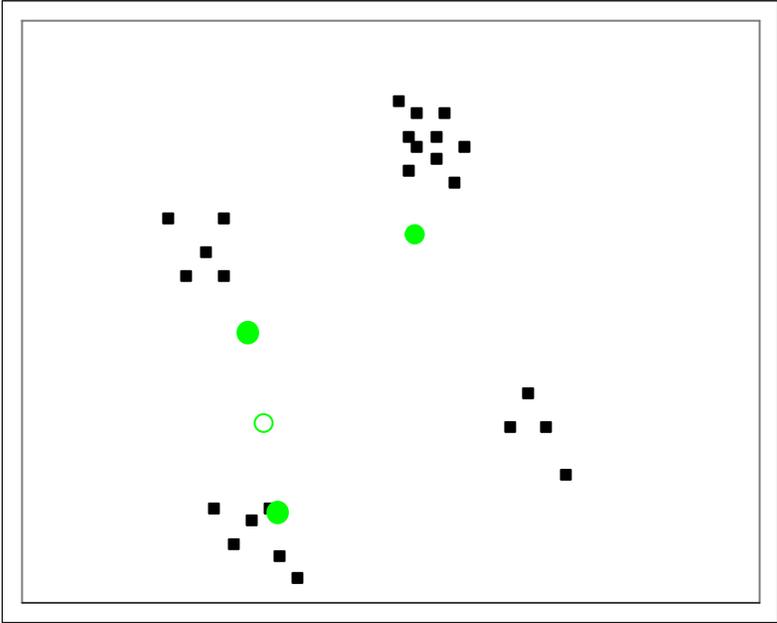


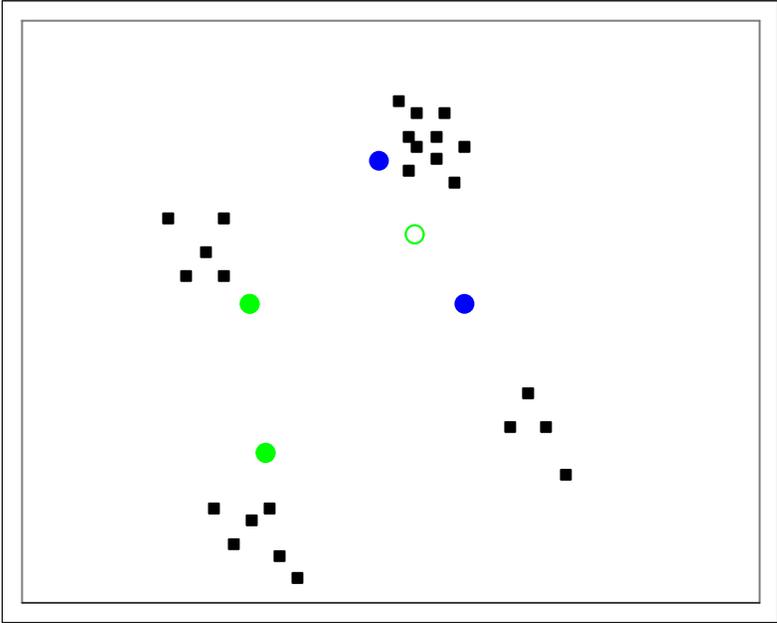


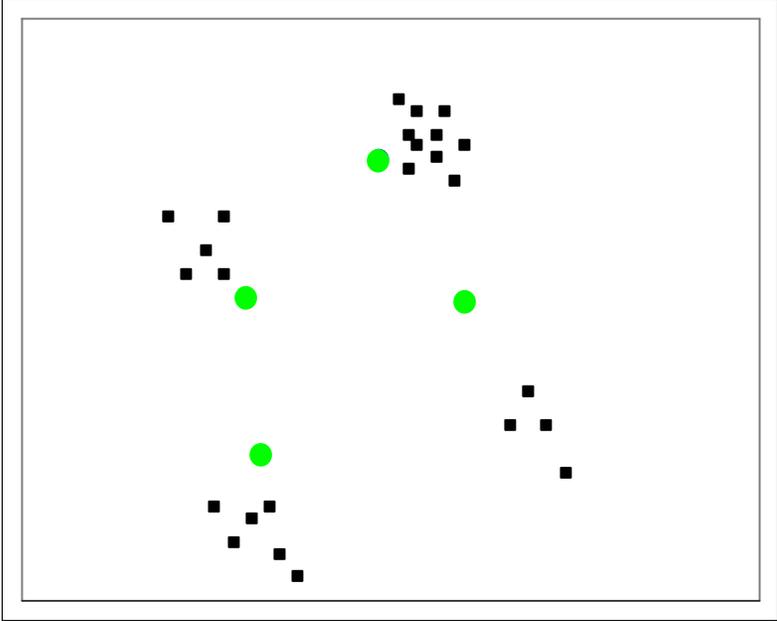


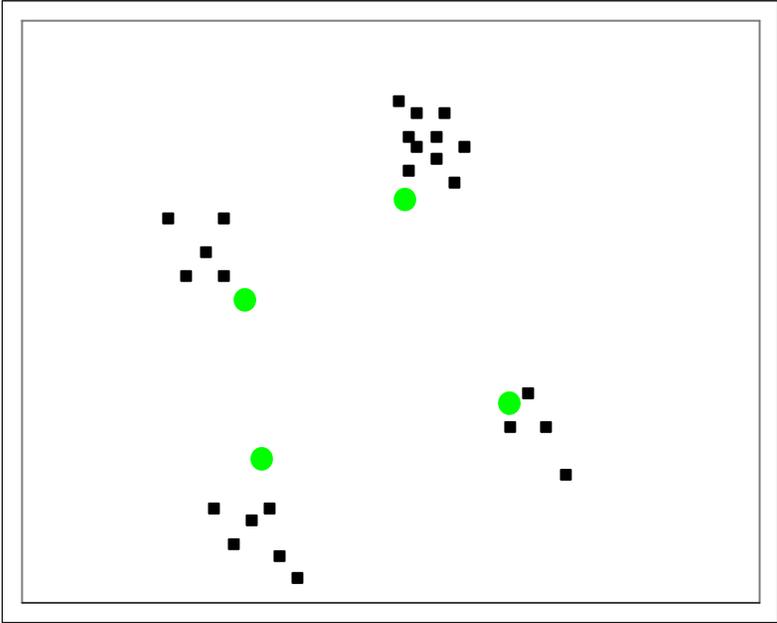


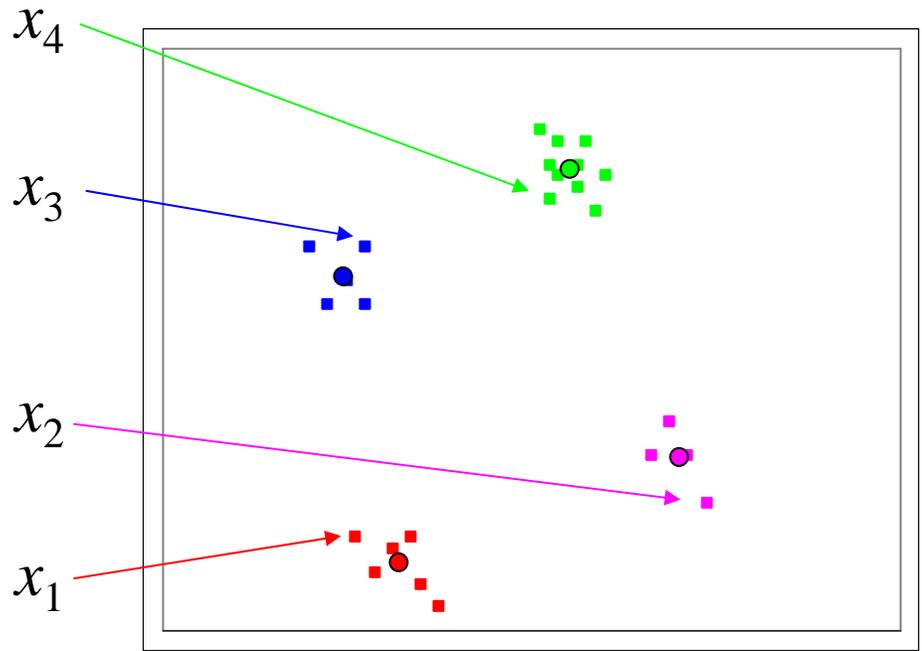












cluster 1

cluster 2

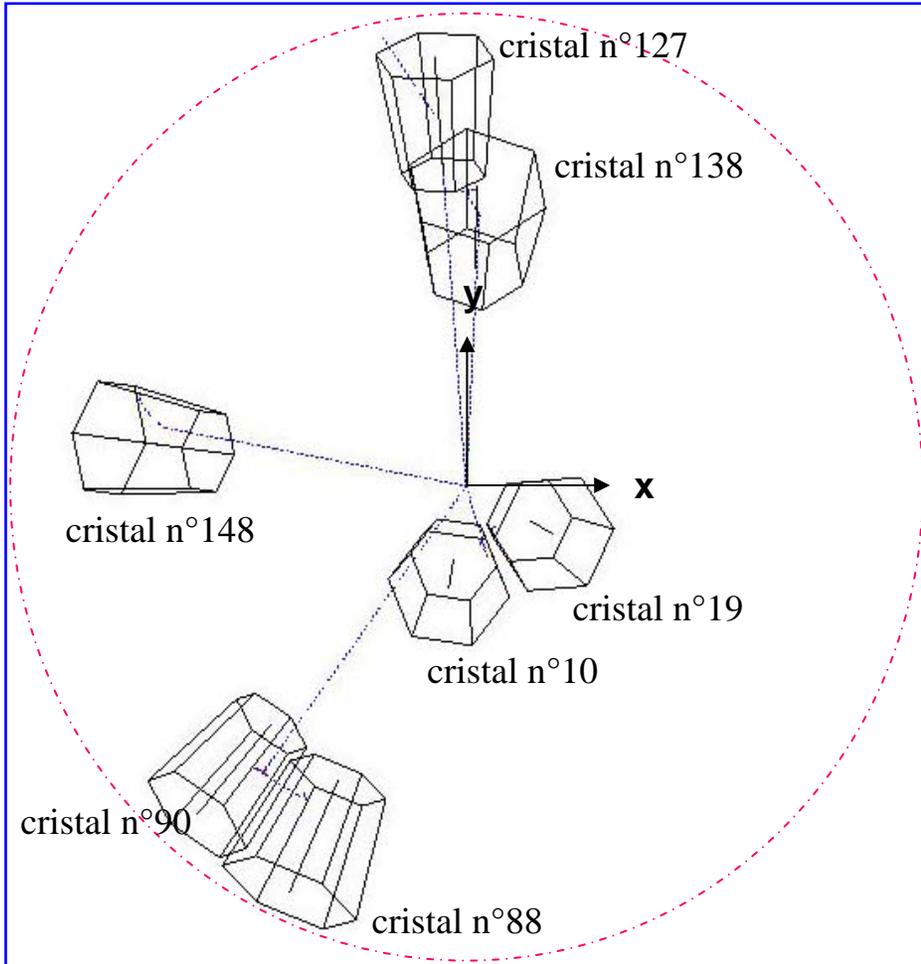
cluster 3

cluster 4

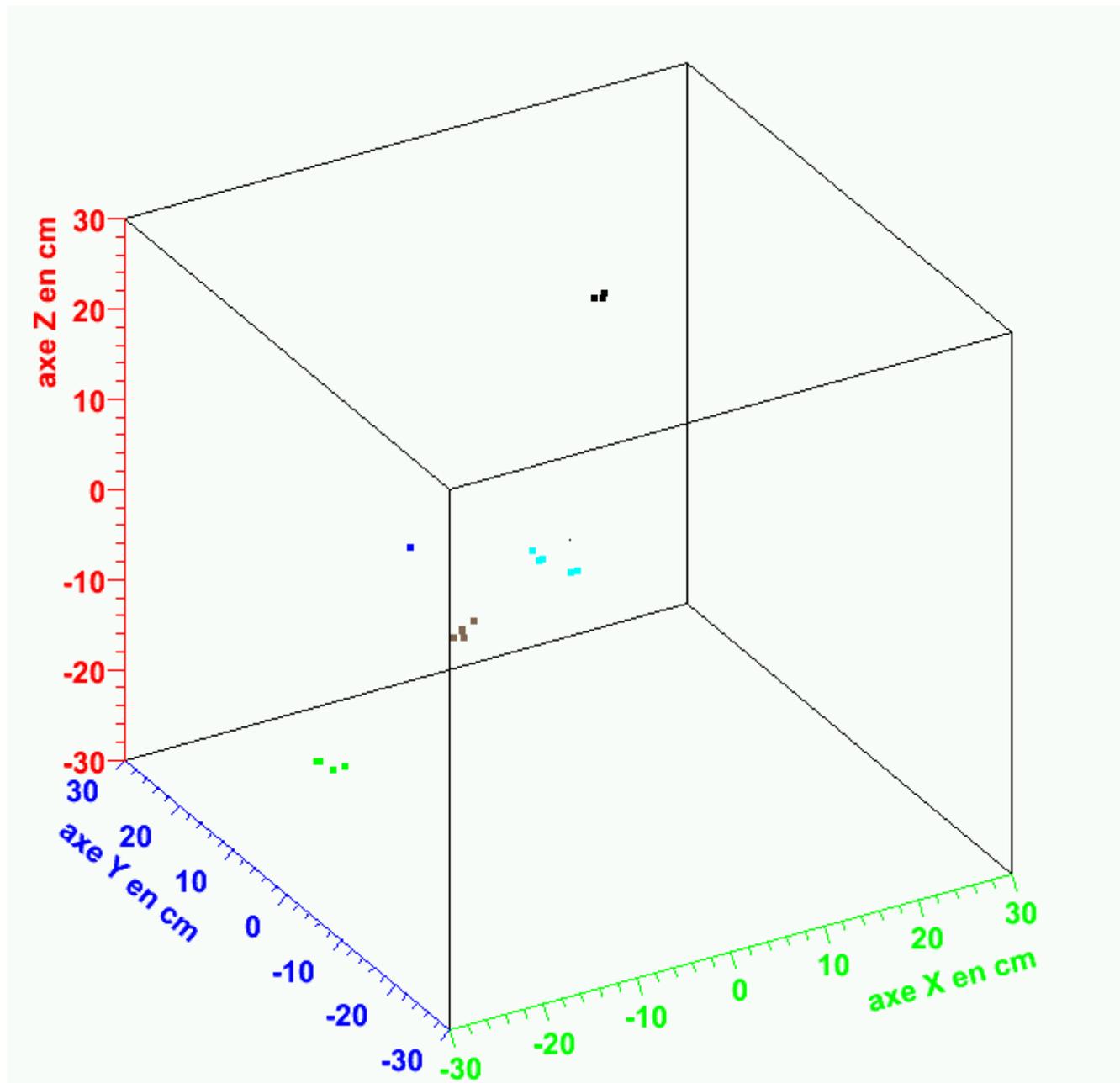
$p(c_1/x_1)=1.$	$p(c_2/x_1)=1.2 \cdot 10^{-11}$	$p(c_3/x_1)=6.4 \cdot 10^{-5}$	$p(c_4/x_1)=1.5 \cdot 10^{-13}$
$p(c_1/x_2)=3.4 \cdot 10^{-10}$	$p(c_2/x_2)=1.$	$p(c_3/x_2)=4.3 \cdot 10^{-17}$	$p(c_4/x_2)=4.4 \cdot 10^{-9}$
$p(c_1/x_3)=4.2 \cdot 10^{-7}$	$p(c_2/x_3)=1.4 \cdot 10^{-13}$	$p(c_3/x_3)=1.$	$p(c_4/x_3)=6.0 \cdot 10^{-5}$
$p(c_1/x_4)=1.2 \cdot 10^{-11}$	$p(c_2/x_4)=5.4 \cdot 10^{-7}$	$p(c_3/x_4)=1.2 \cdot 10^{-5}$	$p(c_4/x_4)=1.$

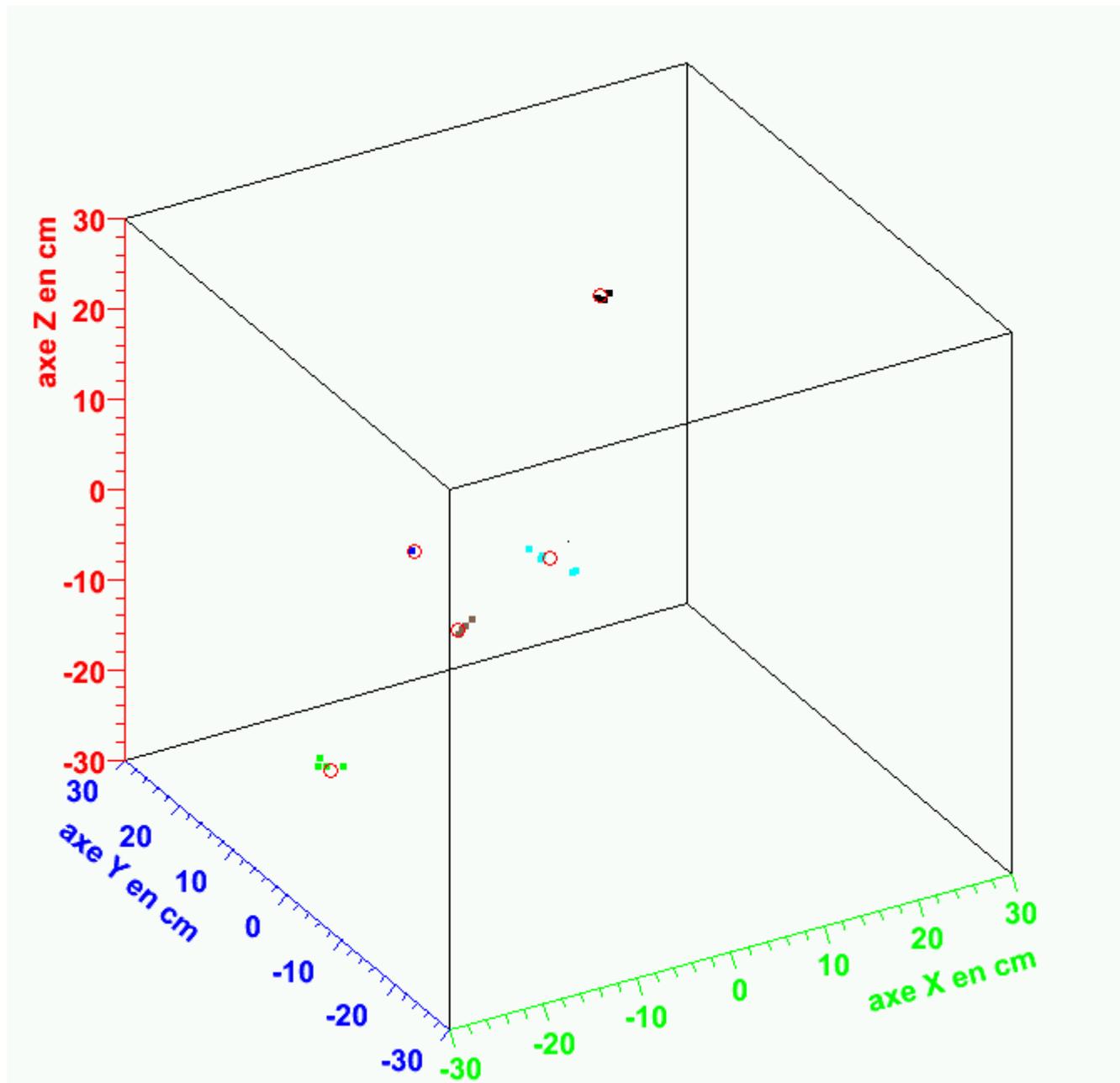
passage à AGATA

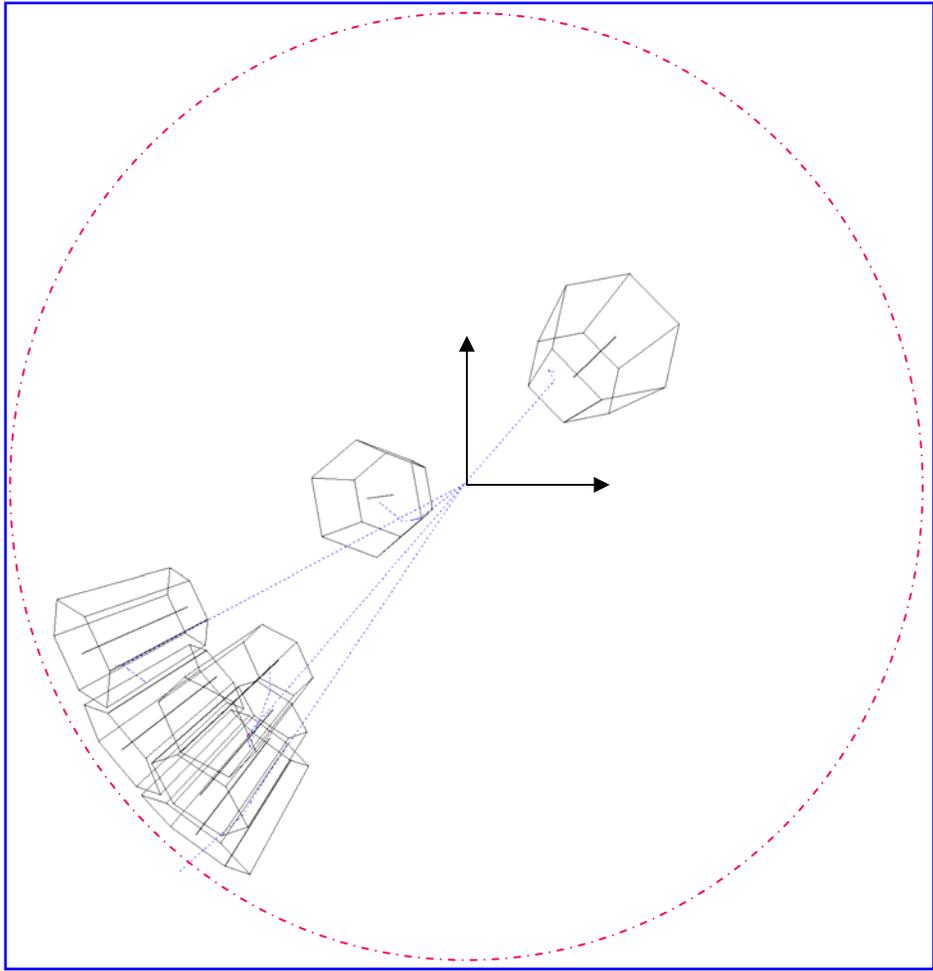
Événement simple :
multiplicité γ : $M_{\gamma} = 5$



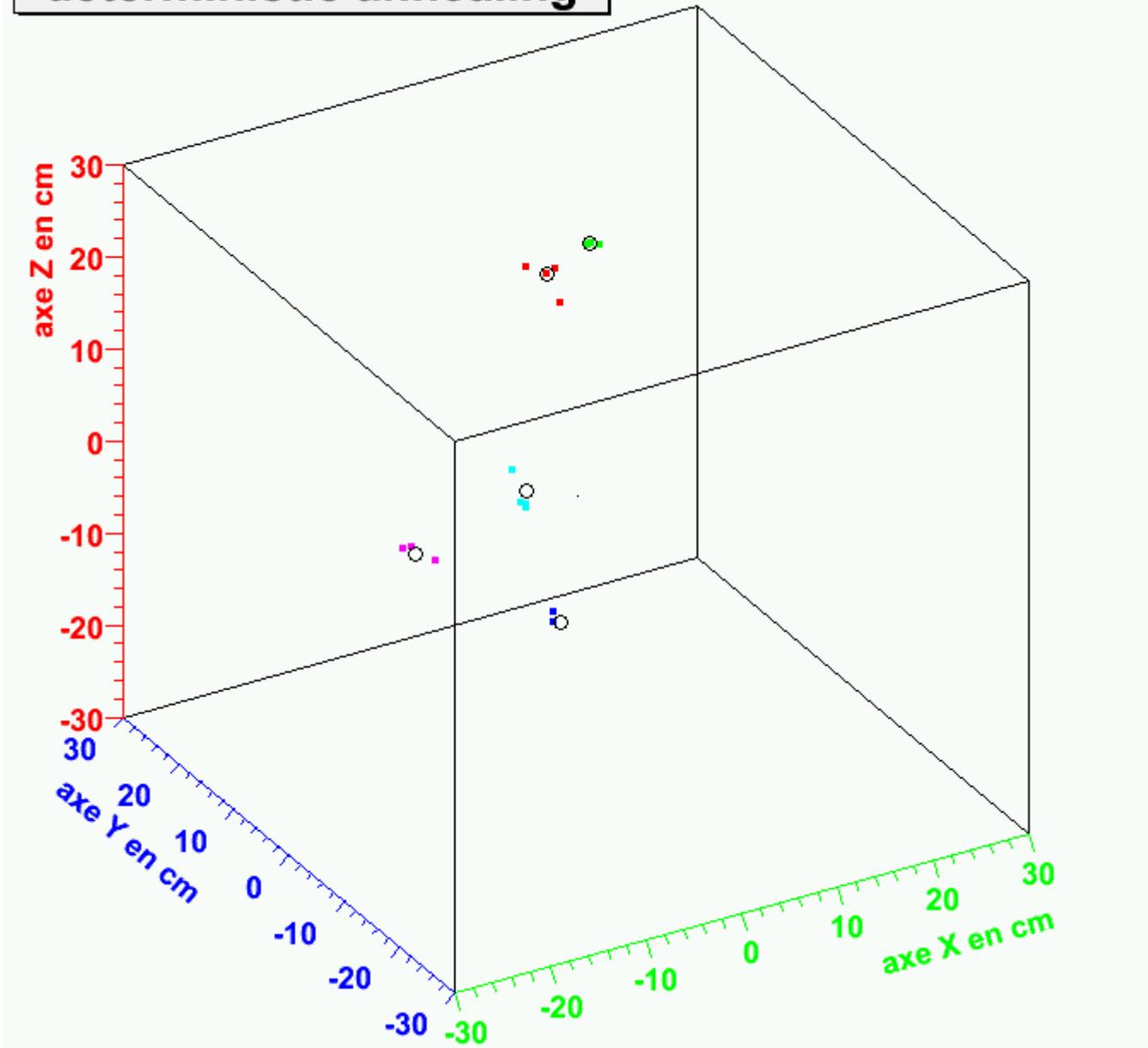
Evenement	type	cristal	segment	E déposée
1	Compton	10	6.5.	0.734
	Compton	10	6.5.	0.087
	Compton	10	6.5.	0.028
	Photoélec.	19	1.3.	0.151
2	Compton	148	4.5.	0.387
	Compton	148	3.5.	0.048
	Compton	148	3.6.	0.209
	Compton	148	3.6.	0.117
	Photoélec.	148	3.6.	0.239
3	Compton	127	5.3.	0.191
4	Compton	138	1.2.	0.159
	Compton	138	1.3.	0.479
	Compton	138	1.4.	0.198
	Compton	138	1.4.	0.005
	Photoélec.	138	1.4.	0.159
5	Compton	90	4.3.	0.144
	Compton	90	4.3.	0.456
	Compton	90	5.4.	0.239
	Compton	88	6.3.	0.039
	Photoélec.	88	6.2.	0.122

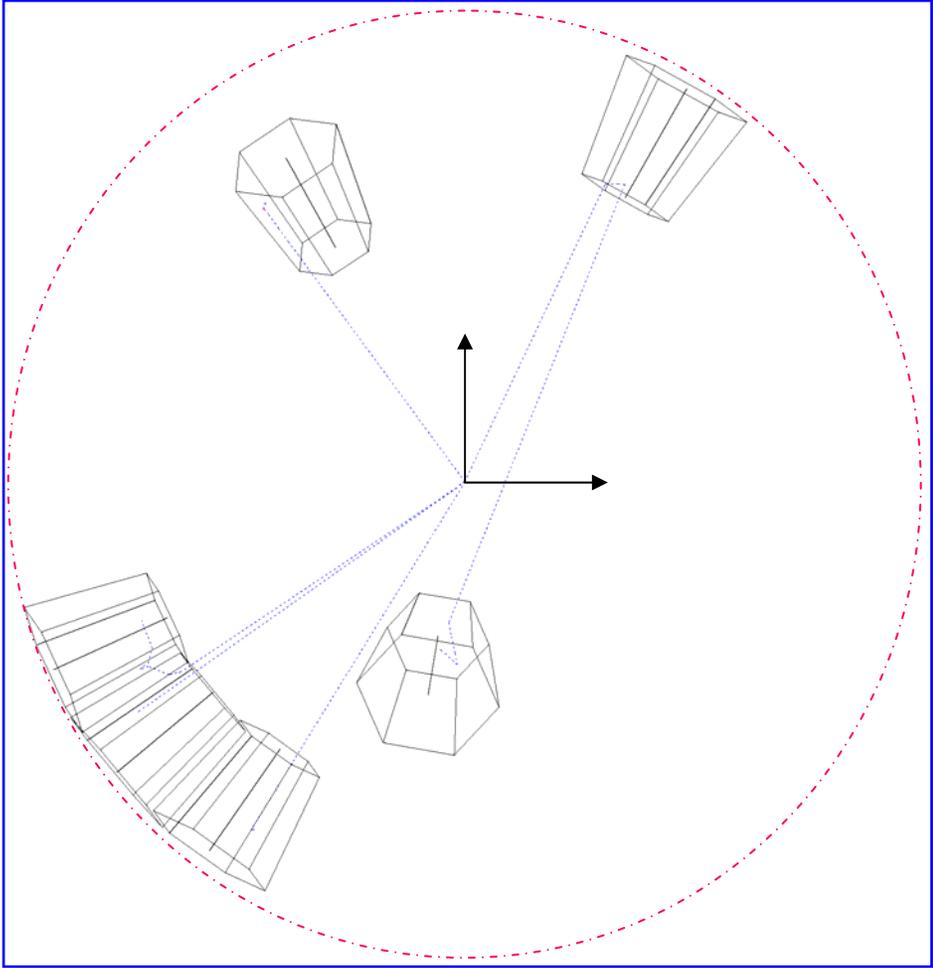




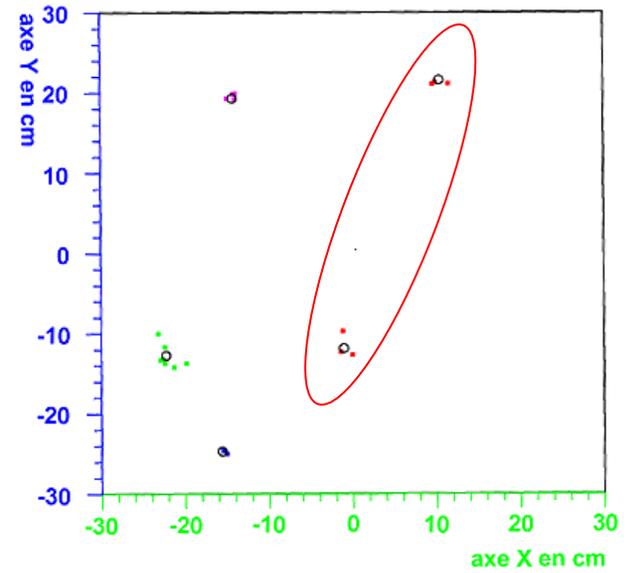
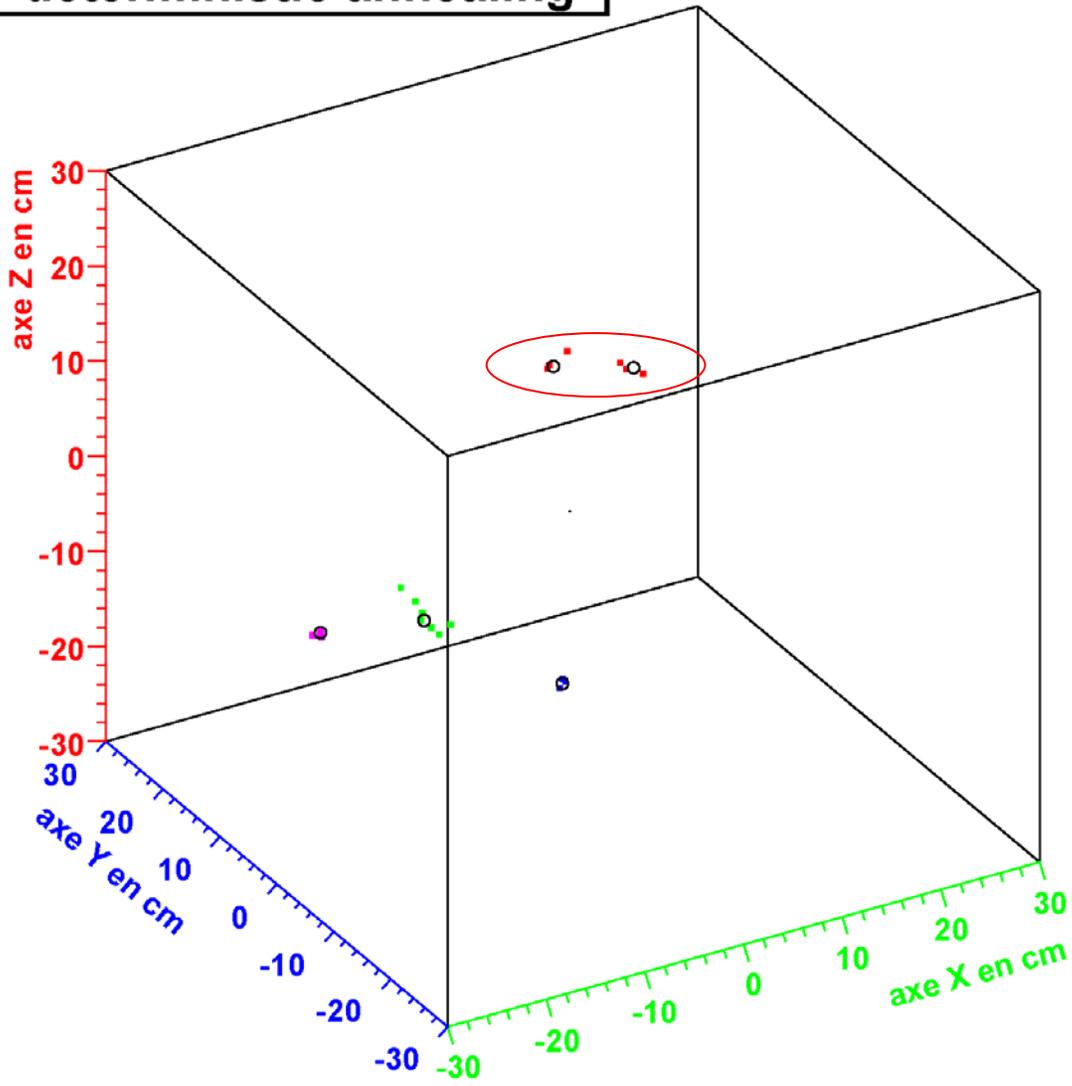


deterministic annealing





deterministic annealing



4. Méthode de reconstruction :

2^{ème} étape : validation des clusters

Nucl. Inst. Meth. A533 (2004) 454.

A la fin de la procédure de clusterisation, n_c amas sont alors trouvés contenant n_{int} points d'interaction chacun. On définit l'énergie du photon incident égale à la somme des énergies des points d'interaction du cluster.

Le cas à un seul point d'interaction est singulier et sera traité plus tard.

Chaque cluster est traité séparément.

Prenons un exemple : cluster contenant 3 points \rightarrow 3! chemins possibles.



À partir de la source, recherche du chemin le plus probable parmi les 3! chemins possibles

Le 1^{er} point d'interaction de la séquence : A

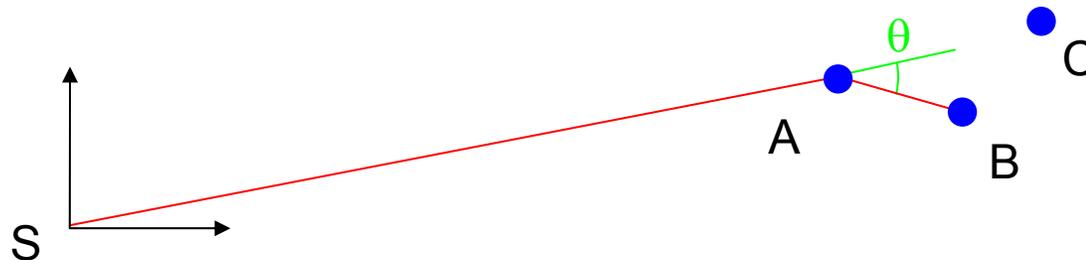
diffusion Compton

énergie de diffusion après le point A : $E_{\text{diff,A}} = E_{\text{tot}} - E_A$

Le 2^{ème} point d'interaction de la séquence : B

angle de diffusion (déterminé à partir des positions de S, A et B)

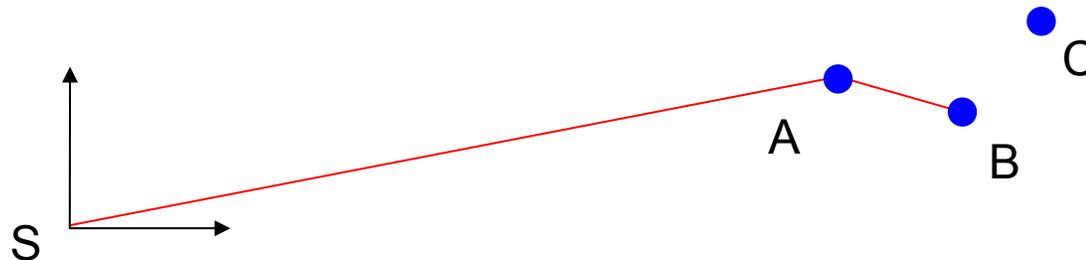
énergie de diffusion après le point A :
$$E_{\text{pos,A}} = \frac{E_{\text{tot}}}{1 + \frac{E_{\text{tot}}}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)}$$



Notion de proximité entre les 2 différentes énergies de diffusion :
figure de mérite :

$$F_A = \exp\left(-\frac{(E_{diff,A} - E_{pos,A})^2}{\sigma^2}\right)$$

où σ : erreur sur les énergies de diffusion due à l'incertitude sur la position des points d'interaction et sur l'énergie déposée à chacun des points.



La probabilité de la séquence S - A - B :

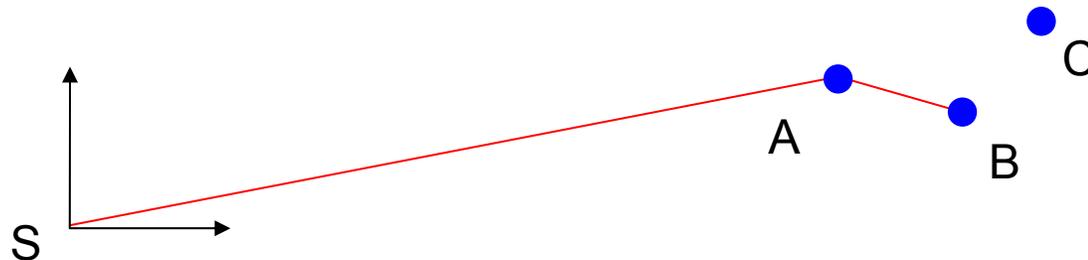
$$P_{S \rightarrow A \rightarrow B} = F_A \cdot P_{Comp}(E_{tot}) \cdot P_{parc}(S \rightarrow A) \cdot P_{Comp}(E_{diff,A}) \cdot P_{parc}(A \rightarrow B)$$

La probabilité d'avoir un effet Compton :

$$P_{Comp}(E) = \frac{\sigma_{Comp}(E)}{\sigma_{tot}(E)}$$

La probabilité de parcourir la distance entre les points I et J :

$$P_{parc}(I \rightarrow J) = \exp\left(-\frac{d(I, J)}{\lambda(E)}\right)$$



La procédure continue vers le 3^{ème} point d'interaction de la séquence : C

énergie de diffusion après le point B : $E_{diff,B} = E_{tot} - E_A - E_B$

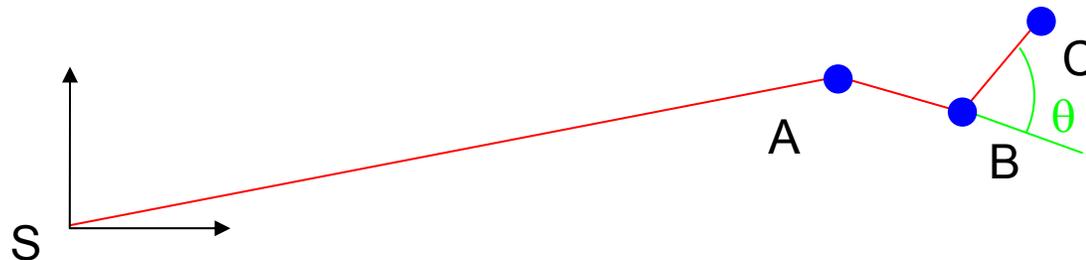
angle de diffusion (déterminé à partir des positions de A, B et C)

énergie de diffusion après le point B :

$$E_{pos,B} = \frac{E_{diff,A}}{1 + \frac{E_{diff,A}}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)}$$

figure de mérite :

$$F_B = \exp\left(-\frac{(E_{diff,B} - E_{pos,B})^2}{\sigma^2}\right)$$

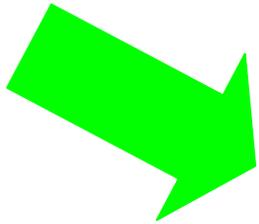


La probabilité de la séquence S - A - B - C :

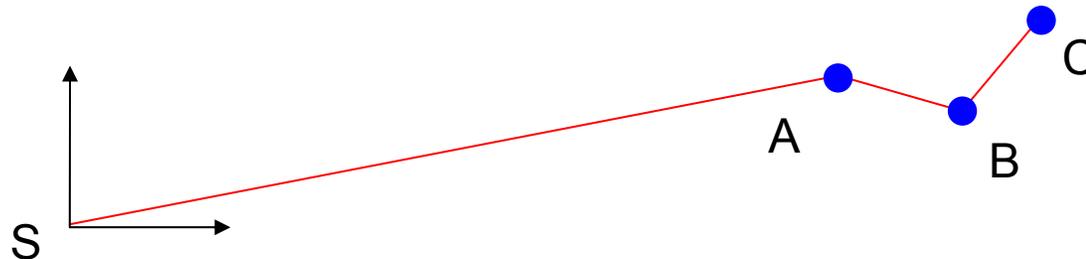
$$P_{S \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C} = F_B \cdot P_{S \rightarrow A \rightarrow B} \cdot P_{Photo}(E_{diff,B}) \cdot P_{parc}(B \rightarrow C)$$

La probabilité d'avoir un effet photoélectrique :

$$P_{Photo}(E) = \frac{\sigma_{Photo}(E)}{\sigma_{tot}(E)}$$



La probabilité finale de la séquence S → A → B → C pour un cluster contenant 3 points d'interaction.



La procédure est répétée pour toutes les permutations possibles des points d'interaction dans le cluster.

S → A → B → C

S → A → C → B

S → B → A → C

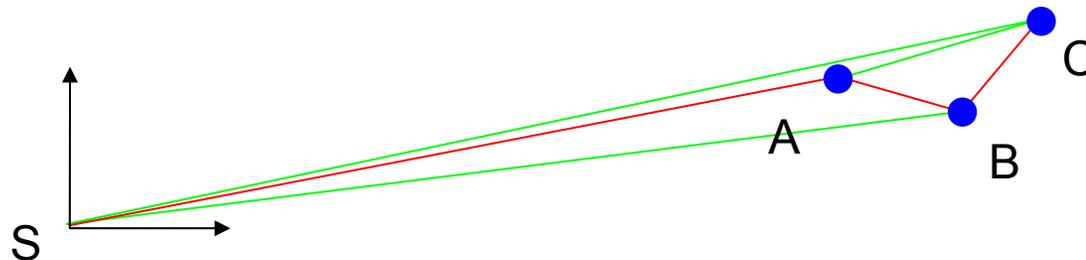
S → B → C → A

S → C → A → B

S → C → B → A

La séquence ayant la plus grande probabilité est gardée comme la séquence correcte dans le cluster

Tous les clusters ayant un test statistique plus faible qu'une valeur seuil (dépendant du nombre de points) sont rejetés.



Cas un point d'interaction dans le cluster : problème pas de reconstruction de la trajectoire.

soit γ de faible énergie : directement effet photoélectrique

soit γ de plus haute énergie : diffusion Compton puis diffusion hors du cristal.

Il s'agit d'une partie importante de l'algorithme :

Avec γ de faible énergie, il y a perte d'efficacité importante si ils ne sont pas inclus.

En outre, une détérioration du rapport P/T pour les énergies plus élevées.

Exemple : 3000 γ dans un boule Ge ($r_{\text{int}} = 15$ cm ; $r_{\text{ext}} = 24$ cm).

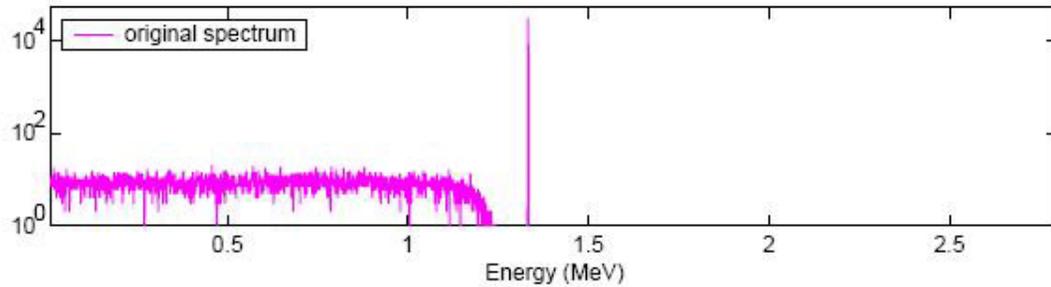
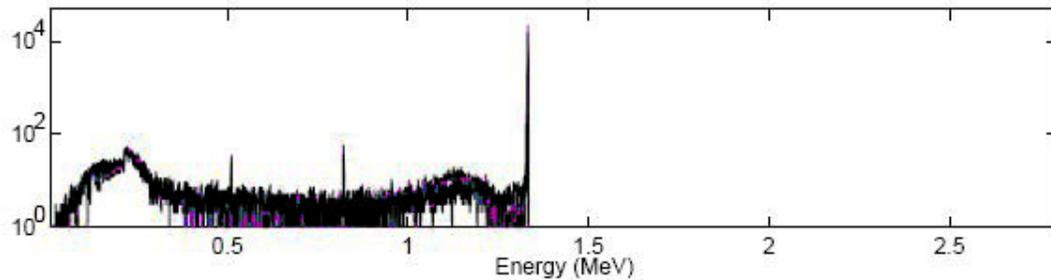
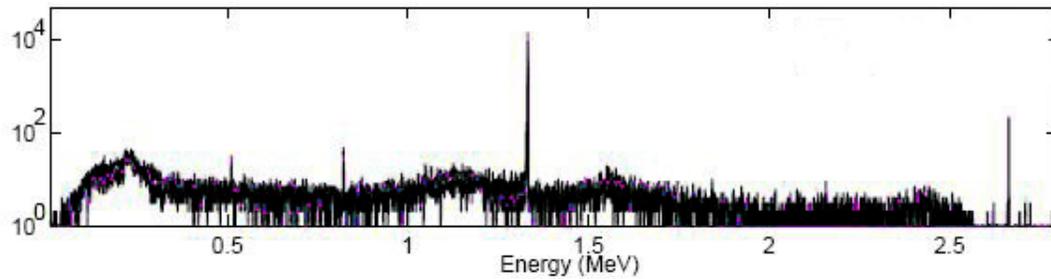
E_{γ}	nb γ abs. tot	nb γ à 1 int.
1.33 MeV	2109	114 (5%)
100 keV	3000	2860 (95%)

Traitement d'un point unique dans le cluster :

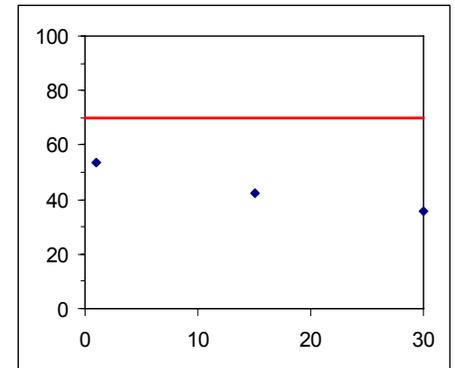
il faut que la probabilité de parcours du photon incident, E_γ , multiplier par la probabilité d'avoir une interaction photoélectrique soit supérieure à une valeur seuil.

Ainsi, pour maintenir une bonne efficacité à basse énergie (inférieur à 5% si on ne tient pas compte des clusters ayant un unique point d'interaction), le prix à payer est de perdre du rapport P/T à plus haute énergie (P/T pour γ à 1.33 MeV : 78 % \rightarrow 72%)

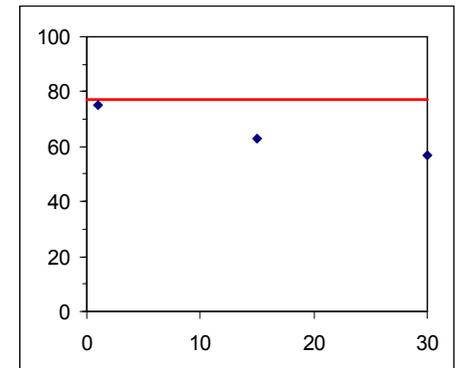
spectres 50000 γ 's 1.332 MeV



efficacité / multiplicité



rapport P/T / multiplicité

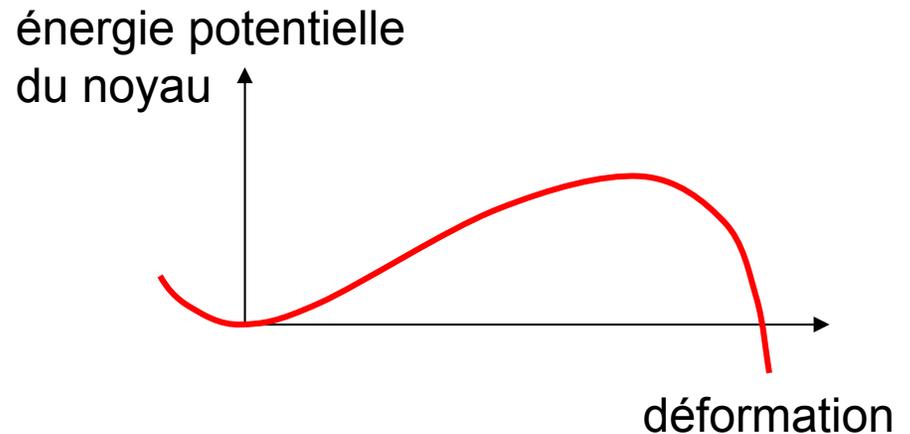


5. Exemples d'application : Forme du noyau atomique

La structure nucléaire peut être comprise par la caractérisation des états nucléaires en fonction de l'énergie d'excitation et du moment angulaire.

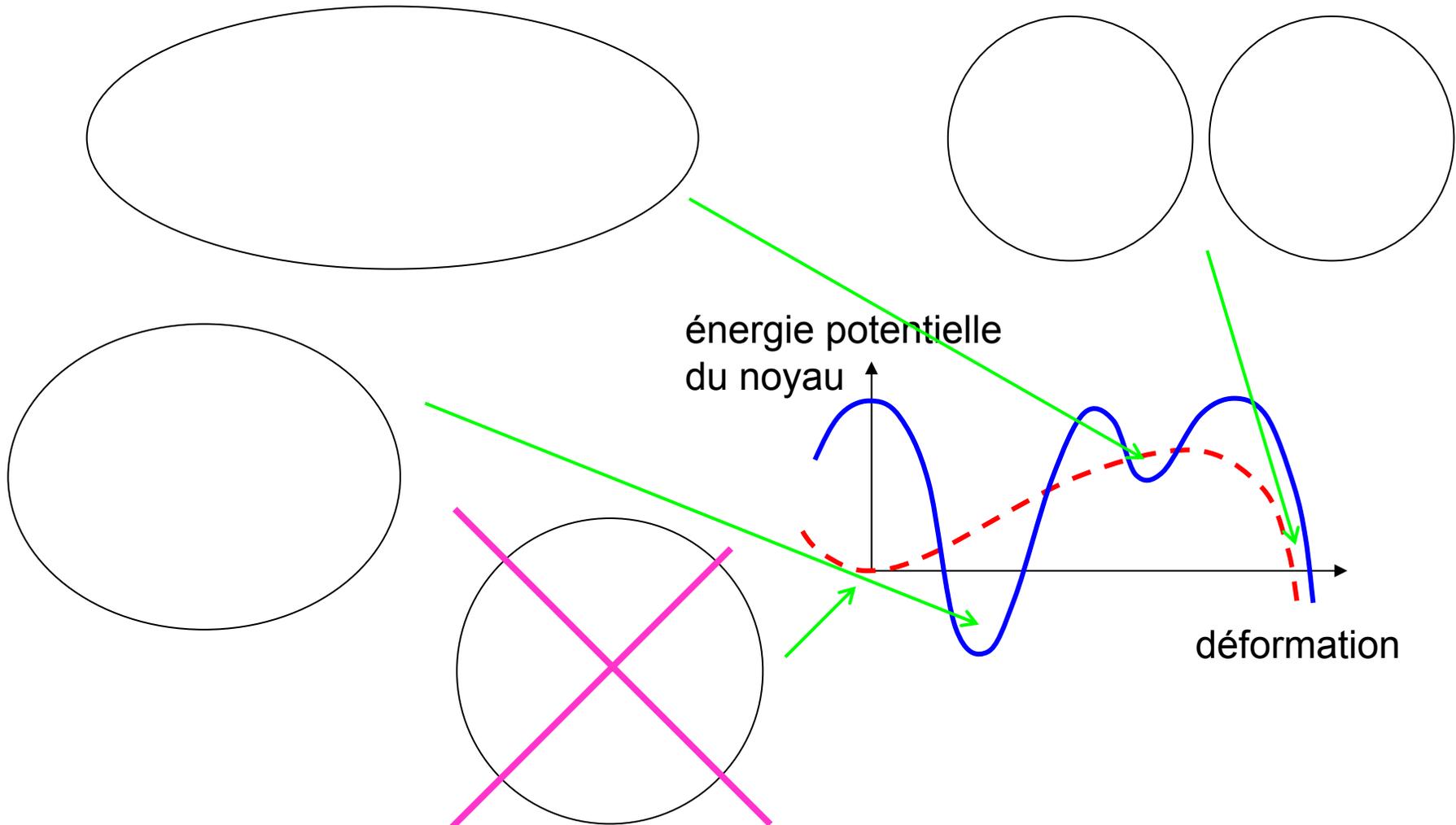
Le noyau en rotation rapide change de forme sous l'action des forces d'inertie. Ainsi, le noyau peut se déformer et adopter plusieurs formes puis se désexciter et retrouver sa forme initiale.

Déformation du noyau atomique (modèle de la goutte liquide) :



Forme du noyau atomique

Maintenant, si on introduit les niveaux énergétiques des noyaux dus aux effets quantiques (dit effet de couche), il apparaît plusieurs minima sur la courbe de l'énergie potentielle.



Moments nucléaires

Le noyau, étant constitué de protons et de neutrons en mouvement, a des propriétés électromagnétiques.

Le moment quadrupolaire électrique de ce noyau donnera des informations sur la forme de ce dernier.

Le moment angulaire du noyau : $J = \mathfrak{I} \omega$

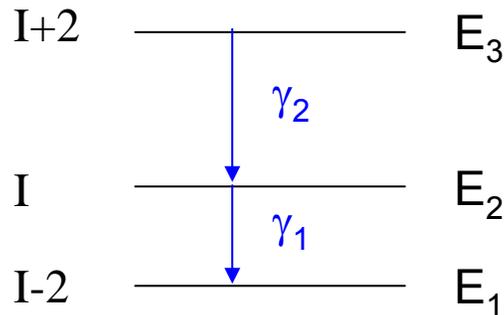
où ω : vitesse angulaire et \mathfrak{I} : le moment d'inertie d'un rotateur

d'énergie :
$$E = \frac{1}{2} \mathfrak{I} \omega^2 = \frac{J^2}{2 \mathfrak{I}}$$

en mécanique quantique : $\langle J^2 \rangle = I(I+1) \hbar^2$

$$E = \frac{I(I+1) \hbar^2}{2 \mathfrak{I}}$$

transition quadripolaire électrique : état I vers I-2



$$E \gamma_1 = E_2 - E_1 = \frac{I(I+1)\hbar^2}{2\mathfrak{I}} - \frac{(I-2)(I-1)\hbar^2}{2\mathfrak{I}} = \frac{\hbar^2}{2\mathfrak{I}}(4I-2)$$

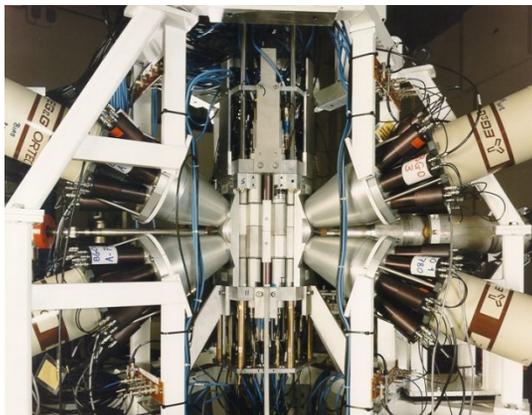
$$E \gamma_2 = E_3 - E_2 = \frac{\hbar^2}{2\mathfrak{I}}(4I+6)$$

$$\delta(E \gamma_2 - E \gamma_1) = \frac{8\hbar^2}{2\mathfrak{I}}$$

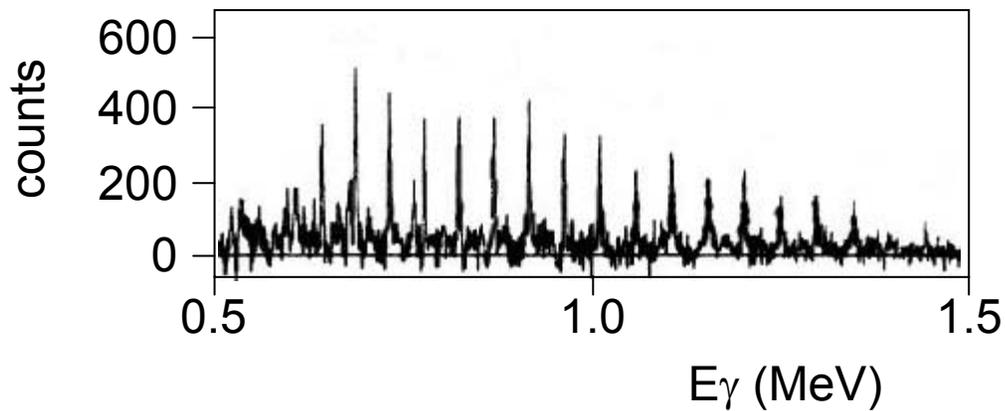
structure du spectre en
peigne de Dirac



première observation de la bande de superdéformation :
dans le noyau ^{152}Dy



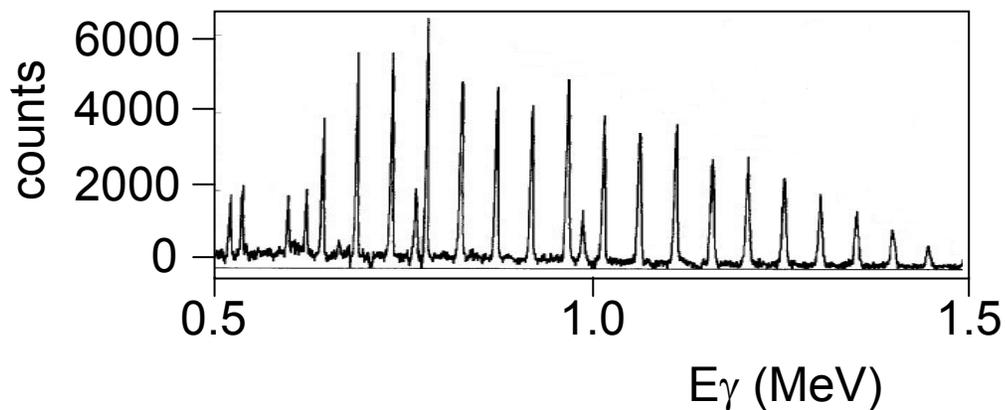
TESSA



Phys. Rev. Lett. 57 (1986) 811.

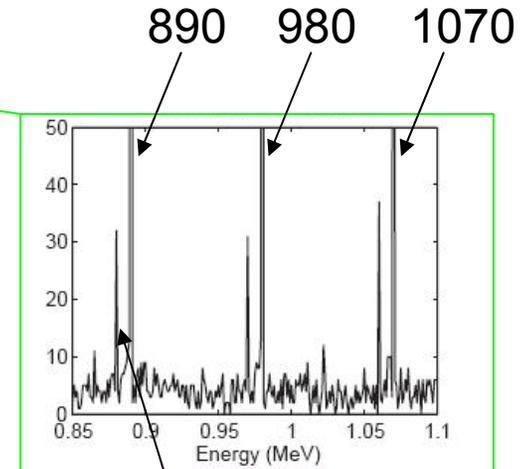
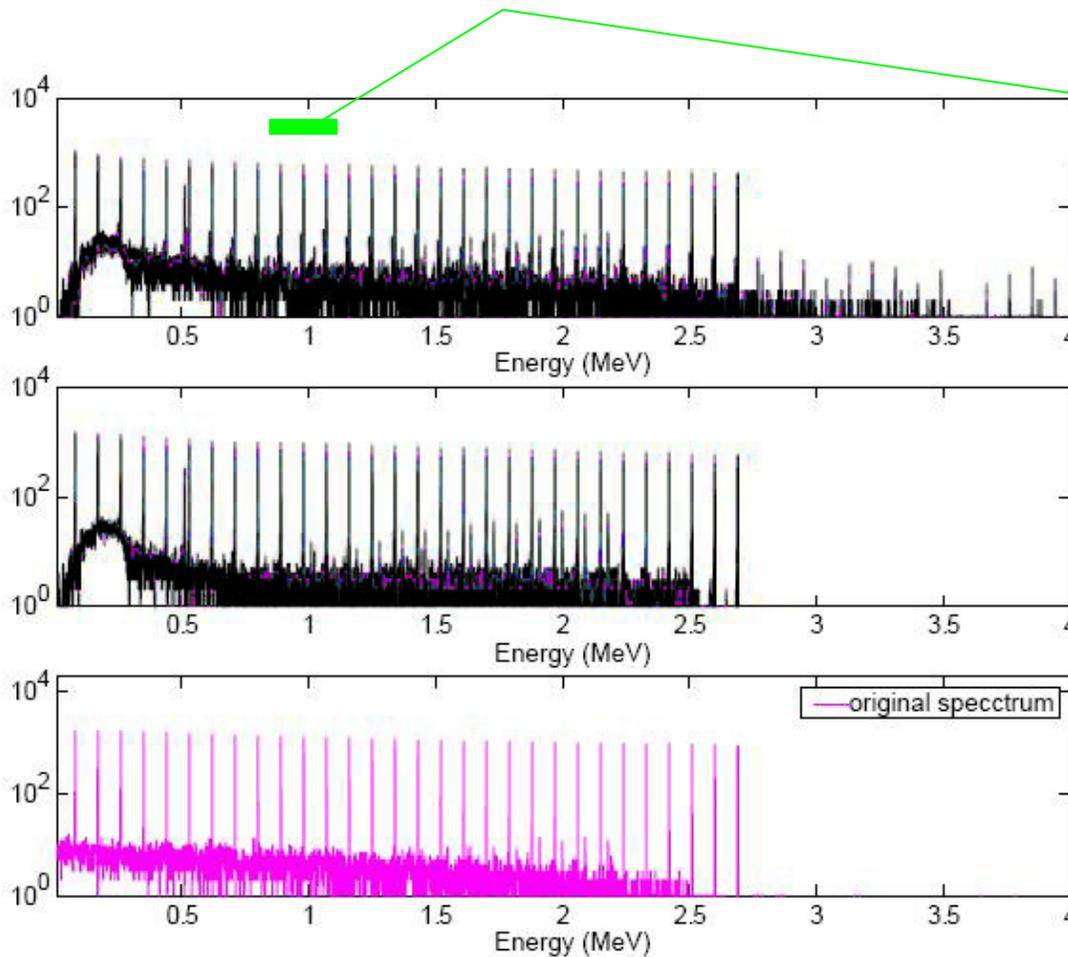


EUROGAM



Nucl. Phys. A583 (1995) 199.

spectre reconstruit d'une bande rotationnelle



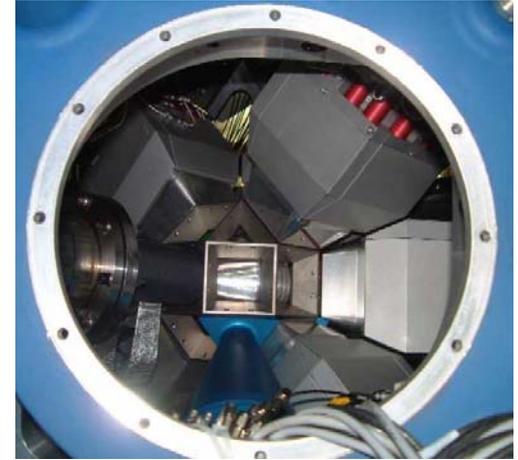
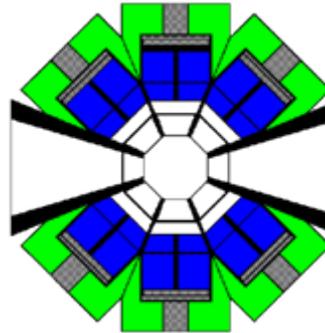
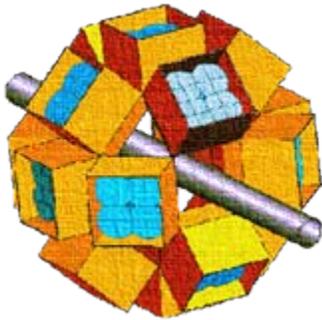
$$\begin{aligned}
 880 &= \Sigma 170 \text{ et } 710 \\
 &+ \Sigma 260 \text{ et } 620 \\
 &+ \Sigma 350 \text{ et } 440
 \end{aligned}$$

simulation de 50000 cascades γ d'énergie allant de 80keV à 2.690MeV d'espacement 90keV

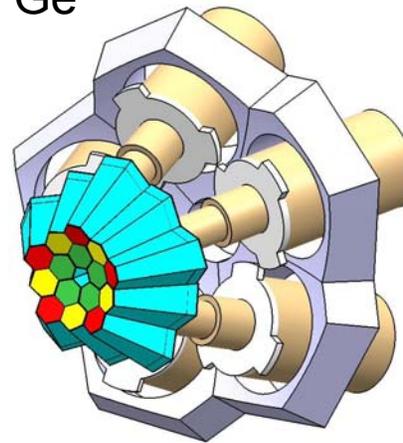
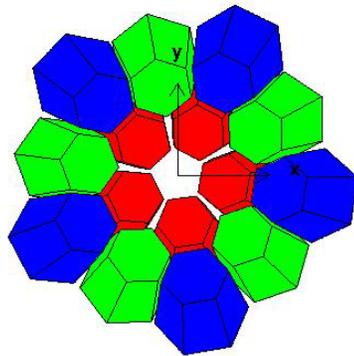
(80 - 170 - 260 - 350 - 440 - 530 - 620 - 710 - 800 - 890 - 980 - 1070 - ...)

comparaison entre AGATA - EXOGAM

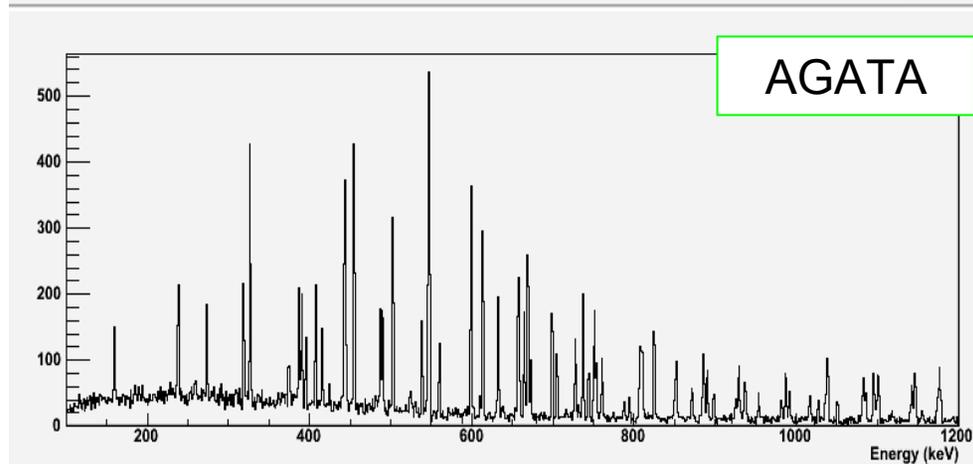
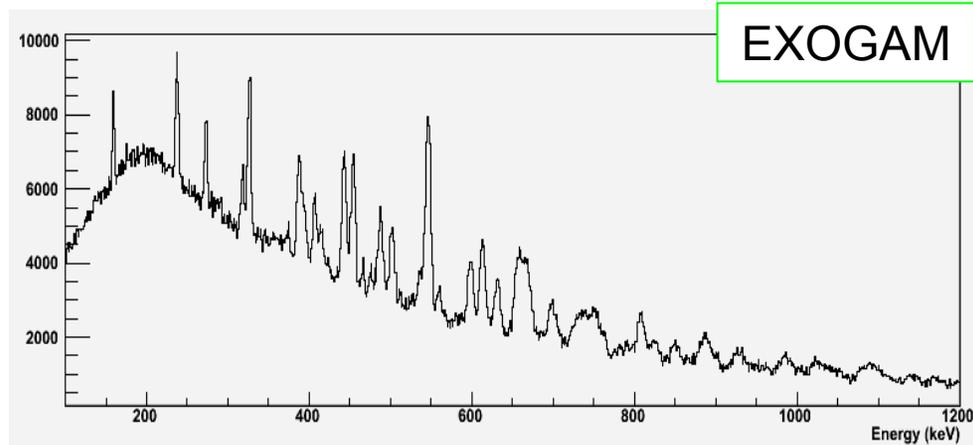
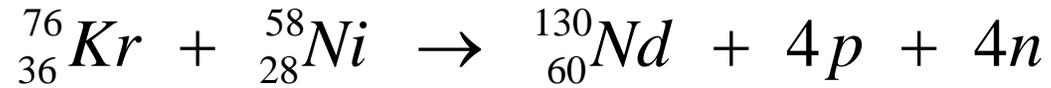
EXOGAM (GANIL) est un ensemble de 16 détecteurs Ge de type clover entourés d'enceintes anti-Compton.



Démonstrateur AGATA : ensemble de 15 Ge



réaction de fusion - évaporation



*Experiments must be reproducible,
they should all fail in the same way*

Remerciements.

Gilbert DUCHENE, IPHC

Jean Pierre ENGEL, IPHC

Alain MICHALON, IPHC