

TABLE des MATIERES

Ch. I	<u>RAPPELS MATHEMATIQUES</u>	<u>03</u>
	SERIES et TRANSFORMEES de FOURIER DISTRIBUTIONS PROBABILITES	
Ch. II	<u>INTRODUCTION aux signaux et systèmes</u>	<u>09</u>
	I- Les DSP II- CLASSIFICATION des SIGNAUX III- DEFINITIONS et EXEMPLES IV- ANALYSE d'un SIGNAL V- CORRELATION	
Ch. III	<u>ECHANTILLONNAGE</u>	<u>16</u>
	I- THEOREME de SHANNON II- ECHANTILLONNAGE REEL III- RECONSTITUTION	
Ch. IV	<u>SYSTEMES NUMERIQUES</u>	<u>22</u>
	I- SIGNAUX NUMERIQUES II- SYSTEMES NUMERIQUES LINEAIRES INVARIANTS III- EQUATION aux DIFFERENCES	
Ch. V	<u>TRANSFORMEE de FOURIER DISCRETE</u>	<u>28</u>
	I- INTRODUCTION II- EFFETS de LA DISCRETISATION de LA FREQUENCE III- TFD d'un SIGNAL à DUREE LIMITEE IV- PROPRIETES de LA TFD V- TFD des SIGNAUX A DUREE ILLIMITEE VI- APPROXIMATION de LA TF des SIGNAUX ANALOGIQUES	
Ch. VI	<u>TRANSFORMEE de FOURIER RAPIDE</u>	<u>34</u>
	I- Mise en forme de la TFD II- Algorithme FFT III- Mise en oeuvre IV- Organigramme et programme sur Matlab	
Ch. VII	<u>MODULATIONS NUMERIQUES</u>	<u>42</u>
	I- Introduction II- Principe de modulations numériques III- Modulation ASK IV- Modulation PSK V- Modulation QAM VI- Modulation FSK VII- Applications	

Ch. VIII	<u>FILTRAGE et DENSITES SPECTRALES</u>	49
	I. DENSITES SPECTRALES II. FILTRAGE	
Ch. IX	<u>DETECTION et ESTIMATION</u>	56
	I- Introduction II- Rapport signal sur bruit III- Filtre optimal IV- Filtre adapté V- Filtre de Wiener VI- Détection par inter corrélation VII- Estimation de la densité spectrale	
Ch. X	<u>TRANSFORMEE en Z</u>	66
	I- INTRODUCTION II- DEFINITION III- TRANSFORMEE en Z INVERSE IV- PROPRIETES V- FONCTION deTRANSFERT	
Ch. XI	<u>FILTRAGE NUMERIQUE</u>	76
	I- INTRODUCTION II- FILTRES IDEAUX et GABARIT III- FILTRES A REPONSE IMPULSIONNELLE DE DUREE FINIE (RIF) IV - FILTRES A REPONSE IMPULSIONNELLE DE DUREE INFINIE (RII) V- SYSTEMES A PHASE MINIMUM	
Ch. XII	<u>Une INTRODUCTION aux DSP</u>	91
	I- INTRODUCTION II- PRESENTATION III- CLASSIFICATION IV - ARCHITECTURES V- DEVELOPPEMENTS	
	<u>FORMULAIRES</u>	97
	<u>BIBLIOGRAPHIE</u>	98

Ch. I : RAPPELS MATHÉMATIQUES

SERIES et TRANSFORMÉES de FOURIER DISTRIBUTIONS PROBABILITÉS

I. ESPACES des SIGNAUX

On note $s(t)$ un signal physique déterministe dépendant de la variable temps t .

1- **signaux intégrables** : $L^1(\mathbb{R}) = \{s / \int_{\mathbb{R}} |s(t)| dt < +\infty\}$

On définit la norme de la convergence en moyenne :

$$\|s\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |s(t)| dt$$

2- **signaux de carré sommable** : $L^2(\mathbb{R}) = \{s / \int_{\mathbb{R}} |s(t)|^2 dt < +\infty\}$

On définit la norme de la convergence en moyenne quadratique :

$$\|s\|_2 = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |s(t)|^2 dt}$$

3- **signaux à décroissance rapide** $S(\mathbb{R})$:

C'est le sous espace de L^1 des signaux $s(t)$ tels que :

$$(\forall p \in \mathbb{N}) \lim_{t \rightarrow \infty} |t^p s(t)| = 0.$$

4- **signaux indéfiniment dérivables** : C^∞

5- **signaux indéfiniment dérivables à support borné** : D

II. SERIES de FOURIER

Soit $s(t)$ dans $L^1[0, T]$ périodique de période T . La décomposition en série de Fourier de $s(t)$ s'écrit :

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j2\pi n \frac{t}{T}} \quad (1)$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) e^{-j2\pi n \frac{t}{T}} dt \quad (2)$$

$(c_n)_n$ est le spectre de Fourier du signal $s(t)$. Selon l'espace des signaux on a :

Dans l'espace L^1	$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$
Dans l'espace L^2	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n ^2 < +\infty$
Dans l'espace C^1	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n < +\infty$

Dans l'espace C^2	$ c_n \leq \frac{K}{n^2}$
Dans l'espace C^8	$(\forall k \in \mathbb{N}) \lim_{n \rightarrow +\infty} n^k c_n = 0$

Théorème de Dirichlet (convergence locale) :

Soit s dans $L^1[0, T]$ de période T , t_0 étant un point de discontinuité de s , si les limites et les dérivées de $s(t)$ à droite et à gauche de t_0 existent, alors :

Théorème de Parseval

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{-N}^{+N} c_n e^{j2\pi n \frac{t_0}{T}} \right) = \frac{1}{2} (s(t_0^+) + s(t_0^-))$$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |c(n)|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |s(t)|^2 dt \quad (4)$$

III . TRANSFORMEE de FOURIER et CONVOLUTION

On définit la transformée de Fourier $S=F(s)$ d'un signal s par :

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad (5)$$

Théorème de Riemann-Lebesgue

Etant donné s dans L^1

- S est une fonction *continue* et *bornée* sur \mathbb{R} .
- F est un opérateur *linéaire* et *continu* de L^1 dans L^∞
- $\lim_{|f| \rightarrow +\infty} |S(f)| = 0$

Théorème de Parseval

$$\int_{\mathbb{R}} |S(f)|^2 df = \int_{\mathbb{R}} |s(t)|^2 dt \quad (6)$$

Convolution

On définit la convolution de deux signaux x et y par :

$$(x * y)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) y(t-u) du \quad (7)$$

On a les propriétés suivantes, selon l'espace des signaux de travail :

x, y dans L^1	$F(x * y) = X \cdot Y$
x, y, X, Y dans L^1	$F(x \cdot y) = X * Y$
x, y dans L^2	$F(x \cdot y) = X * Y$ et $x * y = F^*(X \cdot Y)$
x dans L^2 , y dans L^1	$x * y = F^*(X \cdot Y)$ presque partout

Transformées usuelles

$x(t)$	$X(f)$	
$x(t-t)$	$e^{-j2\pi ft} X(f)$	Retard
$e^{j2\pi ft} x(t)$	$X(f-?)$	Déphasage
$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{f}{a}\right)$	Changement d'échelle
$e^{-a t }$	$\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2} ; \text{Re}(a) > 0$	Lorentzienne, amortissement
e^{-at^2}	$\sqrt{\frac{p}{a}} e^{-\frac{p^2}{a} f^2} ; a > 0$	Gaussienne, cas particulier $a=p$

IV. DISTRIBUTIONS

D étant l'espace des signaux indéfiniment dérivables à support borné, on appelle distribution T toute application linéaire continue de \mathbf{D} dans l'espace des complexes \mathbf{C} . L'espace des distributions est noté \mathbf{D}' (Dual topologique de \mathbf{D}).

$$T(f) = \langle T, f \rangle \quad j \in \mathbf{D} \quad (8)$$

La dérivée d'une distribution T

$$T^{(k)}(f) = \langle T^{(k)}, f \rangle = (-1)^{(k)} \langle T, f^{(k)} \rangle \quad (9)$$

Distribution associée à une fonction f

$$\langle T_f, f \rangle = \langle f, f \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) j(t) dt \quad (10)$$

Distributions tempérées

Ce sont les applications linéaires continues de \mathbf{S} , espace des signaux à décroissance rapide, dans \mathbf{C} . Leur espace est le dual de \mathbf{S} noté \mathbf{S}' .

Distribution de Dirac d

$$d(f) = \langle d, f \rangle = f(0) \quad (11.1)$$

$$d_a(f) = \langle d_a, f \rangle = f(a) \quad (11.2)$$

$$d'(f) = -f'(0) \quad (11.3)$$

$$d''(f) = f''(0) \quad (11.4)$$

d est l'élément neutre de la convolution :

$$\langle s * d, f \rangle = \langle s, f \rangle \quad (12)$$

Usage pratique (abusif) de d :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) d(t-t) dt = x(t) \quad (13.1)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d(t) dt = 1 \quad (13.2)$$

$$d(0)=1 \quad (13.3)$$

Dérivée d'une fonction discontinue

s étant un signal discontinu au point t_0 et ayant des limites finies à droite et à gauche de t_0 , la dérivée de s est une distribution :

$$T=[s(t_0^+)-s(t_0^-)].d + s' \quad (14)$$

s' étant la fonction dérivée de s pour t différent de t_0 et nulle au point t_0 .

V. TRANSFORMEE de FOURIER des DISTRIBUTIONS

La transformée de Fourier $F(T)$ d'une distribution T est la distribution $F(T)$ définie par :

$$\langle F(T), f \rangle = \langle T, F(f) \rangle \quad (15)$$

$F(f), f \in D$.

T	F (T)
d_a	$e^{-j2\pi f a}$
$e^{j2\pi f a}$	d_a
$sign(t)$	$\frac{1}{j\pi} \cdot \frac{1}{f}$
$u(t)$ (échelon un au point 0)	$\frac{1}{2}d + \frac{1}{j2\pi} \cdot \frac{1}{f}$
$Sin(2\pi f_0 t)$	$\frac{d(f-f_0) - d(f+f_0)}{2j}$
$Cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{d(f-f_0) + d(f+f_0)}{2}$

VI. TRANSFORMEE de LAPLACE

On définit la transformée de Laplace $S(p)$ d'un signal s par :

$$S(p) = \int_0^{+\infty} s(t)e^{-pt} dt \quad (16)$$

1	1/p
t	1/p ²
s' (t)	p.S(p)-s(0)

Application aux équations différentielles linéaires à coefficients constants

$a.x''(t)+b.x'(t)+c.x(t)=y(t)$, devient :

$$X(p) = \frac{Y(p) + a.x'(0) + (a.p + b).x(0)}{a.p^2 + b.p + c}$$

VII. ELEMENTS de PROBABILITES

Variable aléatoire

X est une variable aléatoire lorsque les valeurs x qu'elle peut prendre dépendent du hasard selon une loi de probabilité appelée distribution.

Fonction de répartition

$$F(x) = \text{Prob}(X = x) \quad (17)$$

Propriétés

$$F(-\infty) = 0 \quad (18.1)$$

$$F(+\infty) = 1 \quad (18.2)$$

F est une fonction monotone.

Densité de probabilité

$$p(x) = \frac{d}{dx} F(x) \quad (19)$$

Propriétés

$$0 \leq p(x) \quad \forall x \quad (20.1)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1 \quad (20.2)$$

Fonction caractéristique

C'est la transformée de Fourier inverse de la densité de probabilité. Elle est utile pour le calcul des moments de la v.a.

Espérance mathématique

$$E[f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot p(x) dx \quad (21)$$

La moyenne statistique

$$E[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p(x) dx \quad (22)$$

La Variance et l'écart type

$$s^2 = E[(x - m)^2] = E[x^2] - m^2 \quad (23)$$

Variables aléatoires bidimensionnelles

Soient X et Y deux v.a, (X, Y) est une v.a. bidimensionnelle dont la fonction de répartition conjointe est définie par :

$$F(x, y) = \text{Prob}(X = x \text{ et } Y = y) \quad (24)$$

et sa densité de probabilité conjointe :

$$p(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} \quad (25)$$

Probabilités marginales

$$p_x(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dy \quad (26.1)$$

$$p_y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx \quad (26.2)$$

Probabilités conditionnelles

$$p(x/y) = \frac{p(x, y)}{p_y(y)} \quad (27.1)$$

$$p(y/x) = \frac{p(x, y)}{p_x(x)} \quad (27.2)$$

Variables aléatoires indépendantes

X et Y sont statistiquement indépendantes si :

$$p(x, y) = p_x(x) \cdot p_y(y) \quad (28)$$

Conséquence :

$$E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y] \quad (29)$$

Lois de probabilités usuelles

Variables aléatoires discrètes

LOI	Support	Probabilité $P(X=k)$	Espérance	Variance
Bernoulli : B(p) $0 < p < 1$	{0 ; 1}	$P(0)=1-p$ $P(1)=p$	p	$p \cdot (1-p)$
Binomiale : B(n,p) $0 < p < 1$	{0 ; 1... ; n}	$C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$	n.p	$n \cdot p(1-p)$
Poisson : P(?) $? > 0$	N	$e^{-1} \frac{1^k}{k!}$?	?
Géométrique : G(p) $0 < p < 1$	N^*	$p(1-p)^{k-1}$	1/p	$(1-p)/p^2$

Variables aléatoires continues

LOI	Support	Densité	Espérance	Variance
Uniforme : U(a,b) a,b réels	[a,b]	$\frac{1}{b-a} \cdot 1_{[a,b]}$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$
Normale : N(m,s²) $0 < s, m$ réel	R	$\frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2s^2}}$	m	s^2
Exponentielle : Exp(?) $? > 0$	R^+	$? \cdot e^{-?x}$	1/ ?	1/ ? ²

Ch. II : INTRODUCTION aux SIGNAUX et SYSTEMES

I-	Les DSP
II-	CLASSIFICATION des SIGNAUX
III-	DEFINITIONS et EXEMPLES
IV-	ANALYSE d'un SIGNAL
V-	CORRELATION

I- Les DSP (Digital Signal Processor)

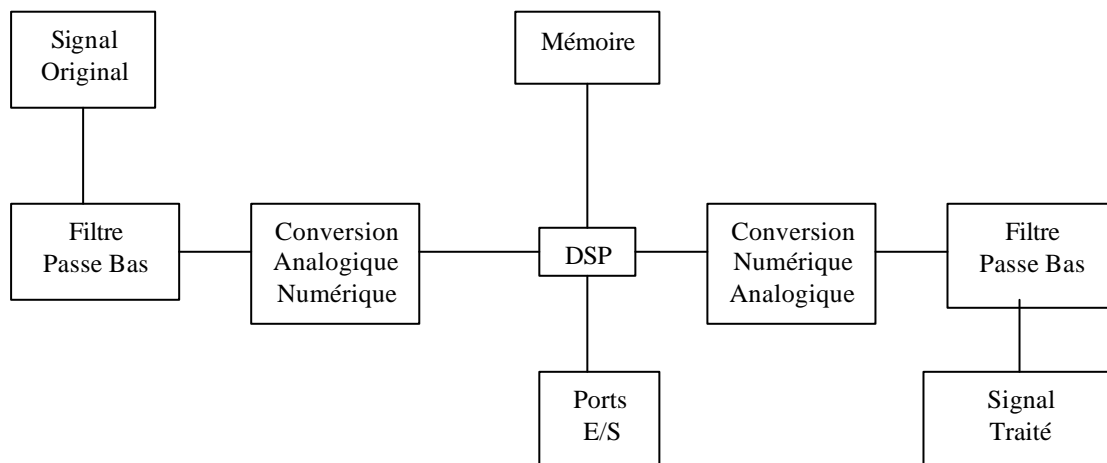
L'omniprésence des processeurs numériques du signal dans presque tous les systèmes d'échange et de production de l'information reflète une partie des champs importants que brasse la discipline du traitement du signal. C'est pour cette raison qu'une vue panoramique des DSP peut constituer une bonne introduction à ce cours.

Les DSP sont des microprocesseurs spécifiquement conçus pour le traitement des signaux numériques. Ils sont utilisés pour deux tâches distinctes :

- La manipulation de données (Traitement de texte, Bases de données...)
- Le calcul mathématique.

Les microprocesseurs ordinaires peuvent effectuer chacune de ces tâches. Cependant, il est difficile et coûteux d'optimiser le circuit pour les deux tâches simultanément. D'où l'appellation « Processeur dédié » : Processeur optimisé pour une tâche précise.

Les DSP sont caractérisés par le grand flux de données qu'ils peuvent traiter en temps réel, ceci en se basant sur des opérations simples et systématiques « MAC » : Multiplier, Additionner et accumuler. Ceci leur confère une vitesse d'exécution accrue. L'une des raisons de leurs performances peut être attribuée en partie à l'usage plus important du langage Assembleur par rapport au langage C.



Chaîne typique d'un système de traitement numérique du signal

Le marché des DSP

Les DSP équipent les téléphones mobiles, les modems, les instruments de mesure scientifique... Pour cette raison la demande en DSP n'a cessé d'augmenter : En

1995 le marché des DSP enregistrait une activité autour de 2 Billions de Dollars, en 2002 il a déjà franchi les 15 Billions.

Architecture des DSP

Partant des architectures de Von Neumann (mémoire unique pour les données et les instructions plus un CPU) et celles de Harvard (Double mémoire plus un CPU et un contrôleur d'entrées sorties), les DSP typiques disposent d'une mémoire données seules, une mémoire d'instructions et données secondaires, d'un contrôleur I/O à grande vitesse et d'un CPU optimisé pour la multiplication, l'addition, le décalage et l'accumulation.

Le multiprocessing est un aspect primordial des DSP qui peuvent être montés en série, en parallèle ou selon des architectures plus compliquées en réseaux 2D ou 3D afin de réaliser des tâches encore plus délicates avec une rapidité qui ne cesse de s'accroître avec les années.

II- CLASSIFICATION des SIGNAUX

1. GENERALITES

Définition d'un Signal

Un signal est une représentation mathématique d'un phénomène physique. On note $s(t)$ un signal où t est généralement le temps et s une tension électrique, une pression, une température....

On peut avoir un signal à plusieurs variables : Une image mobile 3D est un signal $s(x,y,z,t)$ représentant la luminosité à l'instant t au point de l'espace (x,y,z) .

Définition d'une information

Tout signal imprévisible constitue une information.

En effet un signal connu *a priori* (d'avance) ne nous informe pas puisqu'on le connaît déjà.

Utilité de la représentation d'un phénomène par un signal

Le signal permet le transport de l'information relative à un phénomène à partir d'un émetteur vers un récepteur en traversant un milieu de transmission.

Le traitement d'un signal

Le traitement d'un signal est toute sorte de transformation du signal le rendant exploitable pour une fin précise.

Le bruit

Le bruit est un signal indésirable qui est souvent aléatoire. Il altère l'information contenue dans un signal.

La bande occupée

C'est le domaine fréquentiel ou le support de la transformée de Fourier ou du spectre d'un signal.

Exemples :

Téléphonie	$300\text{Hz} < f < 3.3\text{kHz}$
Mobile	$0.8\text{Ghz} < f < 1\text{Ghz}$
Audio Hi Fi	$20\text{Hz} < f < 20\text{kHz}$
Télévision	$0\text{Hz} < f < 8\text{MHz}$

Remarque : Le bruit occupe en général toute la bande d'activité des signaux utiles.

La bande passante

C'est un intervalle de fréquences permises. Dans un milieu de transmission (Air, fil, matériaux..) seuls les signaux occupant des bandes incluses dans la bande passante peuvent transiter.

2- CLASSIFICATION des SIGNAUX

1^{ere} Classification (phénoménologique)

- **Signaux certains**

$\sin(t)$, $\exp(t)$,... ils sont prévisibles à tout instant t ; ils ne représentent aucune information pour l'observateur.

- **Signaux aléatoires**

Ils sont imprévisibles comme le bruit : ils contiennent de l'information.

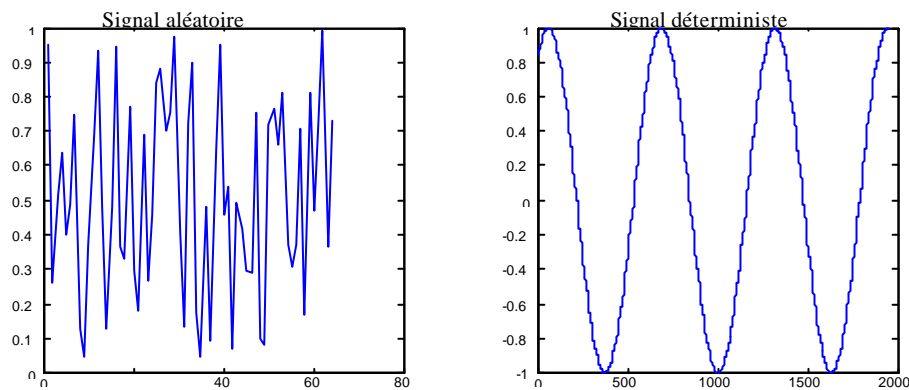


Fig.1

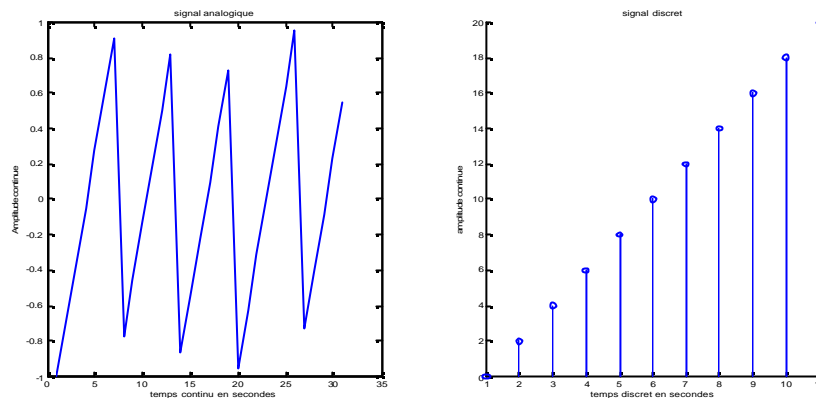
2^{eme} Classification (morphologique)

- **Signaux analogiques :**

Ils prennent des valeurs réelles quelconques à des instants réels quelconques.

- **Signaux numériques**

Le nombre des valeurs prises $s(t)$ est limité, ceci à des instants t discrets.


Fig.2

3^{eme} Classification (*Energétique*)

- **Signaux à énergie finie**

Ce sont les signaux dont l'énergie dans le sens physique s'épuise dans le temps ; tout signal physique limité dans le temps est de cette catégorie.

- **Signaux à puissance moyenne finie**

Ce sont les signaux dont l'énergie délivrée par unité de temps est finie : signaux périodiques, signaux aléatoires (par convention).

- **Signaux à énergie et puissance infinies**

Constituent des signaux théoriques ou modèles mathématiques.

Exemple de chaîne de traitement du signal : Une conversation.

Source du signal	Codage à l'émission	Canal de transmission	Réception du signal	Détection et décodage
Cerveau	Bouche	Air	Oreille	Cerveau
	Bruit	Bruit	Bruit	

III- DEFINITIONS et EXEMPLES

1. Puissance instantanée d'un signal

La puissance instantanée d'un signal $s(t)$, aléatoire ou déterministe, est le carré de son module :

$$p_s(t) = |s(t)|^2 \quad (30)$$

2. Energie d'un signal

$s(t)$ étant un signal analogique à valeurs réelles ou complexes, on définit l'énergie E_s de $s(t)$ déterministe par :

$$E_s = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt \quad (31)$$

Remarque :

la puissance instantanée $p(t)$ est bien l'énergie E par unité de temps.

Exemples :

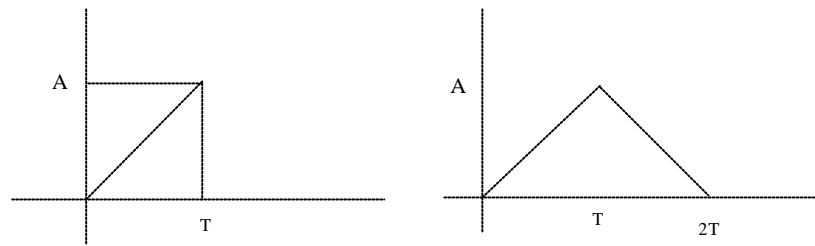


Fig.3

$$E_s = \int_0^T (At/T)^2 dt = A^2 T/3$$

$$E_s = 2A^2 T/3$$

3. Puissance moyenne d'un signal

$s(t)$ étant un signal possédant une énergie infinie, on définit sa puissance moyenne P_s par :

Si $s(t)$ est déterministe

$$P_s = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |s(t)|^2 dt \quad (32.1)$$

Si $s(t)$ est aléatoire

$$P_s = E[|s(t)|^2] \quad (32.2)$$

Exemples

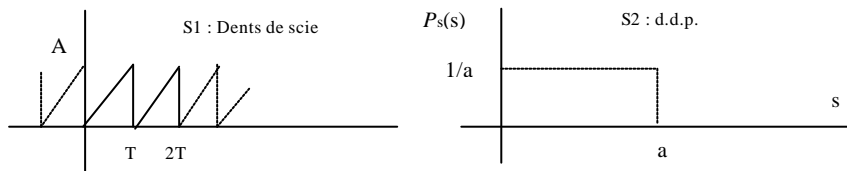


Fig.4

$$P_{s1} = \frac{1}{2T} \int_{-T}^0 \left| (1+t/T)A \right|^2 dt + \frac{1}{2T} \int_0^T \left| (tA/T) \right|^2 dt = A^2/3$$

$$P_{s2} = E[|s(t)|^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 p_s(s) ds = \int_0^a s^2 \frac{1}{a} ds = a^2/3$$

Remarque : on suppose que la puissance du signal aléatoire ne dépend pas de l'instant t (voir stationnarité d'un signal).

IV- Analyse d'un signal (Décomposition)

$[\Phi_n(t)]_n$ étant une famille de signaux connus, analyser le signal $s(t)$ selon la dite famille consiste à chercher des coefficients scalaires (complexes ou réels) $(C_n)_n$ tels que :

$$s(t) = \sum_n C_n \Phi_n(t) \quad (33)$$

C'est une décomposition ou projection du signal $s(t)$ dans l'espace vectoriel des signaux engendré par la famille $[\Phi_n(t)]_n$.

Cas particulier :

Si l'énergie de chaque signal de la famille égale l'unité et si en plus, pour tout $j \neq k$:

$$\int_{\mathbb{R}} \Phi_j(t) \cdot \Phi_k^*(t) dt = 0 \quad (34)$$

On dit que la famille (ou la décomposition) est orthonormale.

Exemple : Analyse de Fourier : $\Phi_n(t) = e^{j2\pi n t/T}$ définies sur $[0, T]$.

On peut décomposer tout signal défini sur $[0, T]$ avec comme coefficients :

$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) \Phi_n^*(t) dt \quad (35)$$

Ceci est valable pour tout signal périodique de période T . On dit qu'on a analysé le signal pour les fréquences multiples ou les harmoniques de la fréquence fondamentale $1/T$.

Néanmoins cela ne signifie pas que le signal ne contient pas d'autres fréquences physiques : On recourt alors à la *transformation* intégrale de Fourier qui dévoile tout le spectre continu du signal et ceci pour tout signal même à support non borné (durée illimitée). Les signaux périodiques constituent une exception pour lesquels les C_n représentent le spectre total (qui est discret dans ce cas).

Exercice :

1. Est-ce que la famille de Fourier est orthonormale ?
2. Que devient l'énergie du signal $s(t)$?
3. Que devient la puissance d'un signal périodique ?

V. LA FONCTION de CORRELATION

On cherche à *comparer* à l'instant t deux signaux $x(t)$ et $y(t)$; On définit alors la fonction d'*intercorrélation* $R_{xy}(t)$:

Si $x(t)$ et $y(t)$ sont à *énergie finie* :

$$R_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^*(t+t) dt \quad (36.1)$$

Si $x(t)$ et $y(t)$ sont *périodiques* (de même T) :

$$R_{xy}(t) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) y^*(t+t) dt \quad (36.2)$$

Si $x(t)$ et $y(t)$ sont à *puissance moyenne finie* :

$$R_{xy}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) y^*(t+t) dt \quad (36.3)$$

Si les signaux sont *aléatoires* :

$$R_{xy}(t) = E[x(t) y^*(t+t)] \quad (36.4)$$

Remarque

1- On suppose que les signaux aléatoires sont stationnaires au second ordre ($E[x(t)]$ et $E[x(t)y^*(t+\tau)]$ ne dépendent pas de t).

Cependant il ne faut pas omettre de l'esprit que les signaux physiques possèdent généralement un régime *transitoire* non stationnaire et un régime permanent à peu près stationnaire.

2- la fonction de corrélation est un produit scalaire entre deux vecteurs.

Fonction d'auto-corrélation

La fonction d'auto-corrélation est la fonction $R_{xx}(\tau)$ notée $R_x(\tau)$, dont la transformée de Fourier est la densité spectrale de puissance (voir ch. VIII).

Exemple

$x(t) = A \sin(2\pi f t + j)$. On pose $T = 1/f$.

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t+\tau)dt = \frac{A^2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin(2\pi f t + j) \sin(2\pi f t + j + 2\pi f \tau) dt \\ &= \frac{A^2}{2T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(2\pi f \tau) dt - \frac{A^2}{2T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(4\pi f t + 2j + 2\pi f \tau) dt \end{aligned}$$

Soit :

$$R_x(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f \tau) \quad (37)$$

Exercice

1. Montrer que $R_x(\tau)$ est paire. Quel est son maximum ?
2. Que représente $R_x(0)$?
3. Dans le cas d'un signal aléatoire, décomposer $R_x(0)$ en deux termes et interpréter.
4. Que pensez vous de $R_x(\tau)$ pour un signal aléatoire lorsque τ tend vers l'infini ?

Ch. III : ECHANTILLONNAGE des SIGNAUX

I- THEOREME de SHANNON II- ECHANTILLONNAGE REEL III- RECONSTITUTION

I. THEOREME de SHANNON-NIQUIST

1. Définition

Soit $s(t)$ un signal analogique de transformée de Fourier $X(f)$; Echantillonner le signal $s(t)$ consiste à choisir une fréquence F_e et de construire un nouveau signal $s(kT_e)$ avec k un entier et $T_e=1/F_e$.

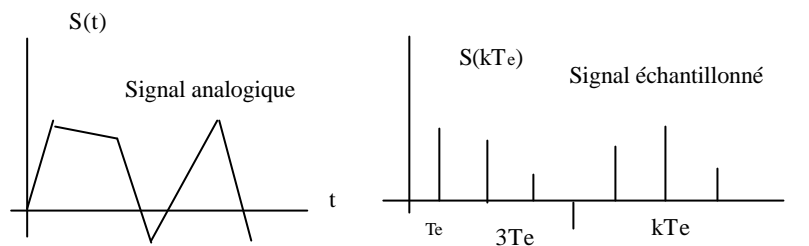


Fig.5

On peut écrire $s(nT_e)$ sous la forme condensée :

$$s(nT_e) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT_e) d(t - kT_e) \quad (38.1)$$

$$s(nT_e) = s(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d(t - kT_e) \quad (38.2)$$

La dernière expression est la multiplication du signal par *le peigne de Dirac*.

2. Spectre du signal échantillonné

En prenant les transformées de Fourier des termes de l'expression ci-dessus, on arrive à l'expression du spectre du signal échantillonné (Forme sommatoire de Poisson) :

$$Y(f) = F_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S(f - kF_e) \quad (39)$$

Cette expression montre que le spectre $Y(f)$ est périodique de période F_e et qu'il est la somme des répliques (copies) du spectre original $S(f)$ décalées de kF_e .

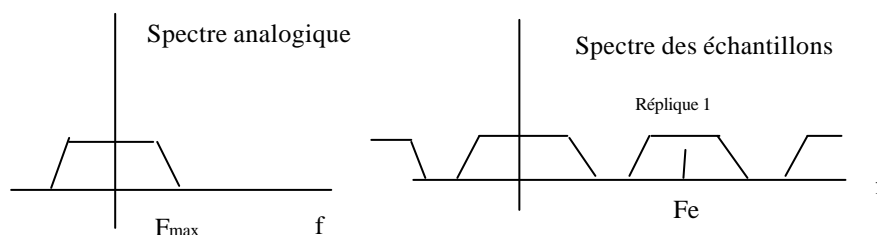


Fig.6

Remarques :

- Si le support du spectre $S(f)$ n'est pas borné (s'étale sur l'axe réel) il y a un repliement du spectre des échantillons (*aliasing*), on ne peut pas isoler le spectre original à partir de celui des échantillons.
- Si le spectre $S(f)$ est borné entre $-F_{\max}$ et $+F_{\max}$ on constate le même phénomène si F_e est inférieure à $2 F_{\max}$.

3. Théorème de Shannon

Pour récupérer le signal analogique $s(t)$ à partir des échantillons $s(kT_e)$ il faut deux conditions :

- Que le support de $S(f)$ soit borné de largeur $B=2F_{\max}$.
- Que la fréquence d'échantillonnage soit supérieure à la bande occupée par $S(f)$: **$B= F_e$** .

Si ces deux conditions sont réunies, l'expression de $s(t)$ en fonction des ses échantillons s'écrit :

$$s(t)=B \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT_e) \text{sinc}[B(t - kT_e)] \quad (40)$$

(Voir la démonstration en séance d'exercices).

Cette formule montre bien qu'on peut déterminer exactement la valeur du signal à l'instant t en fonction uniquement des échantillons de ce même signal aux instants kT_e . Cependant la sommation infinie sur k pose un problème au niveau de l'implémentation pratique de cette formule. Tout au plus on peut implémenter une approximation, avec une précision imposée au préalable, en constatant que la fonction $\text{sinc}(x)$ s'évanouit rapidement vers zéro avec le flux des échantillons.

Exemple

$$s(t)=A.\sin(2\pi F_0 t + f).$$

La transformée de Fourier de $s(t)$ s'écrit :

$$S(f)=\frac{A}{2j} \left[e^{jf} \delta(f - F_0) - e^{-jf} \delta(f + F_0) \right] \quad (41)$$

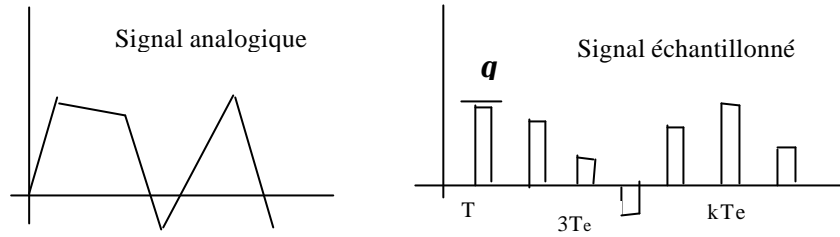
Le spectre de $s(t)$ est composé de deux raies aux fréquences $-F_0$ et $+F_0$ occupant ainsi une bande fréquentielle $B=2F_0$. pour échantillonner *correctement* $s(t)$ il faut choisir une fréquence d'échantillonnage $F_e > 2F_0$.

II. ECHANTILLONNAGE REEL

On peut émettre deux réserves à ce qui vient d'être exposé :

- ✓ Prélever des échantillons en multipliant le signal par le peigne de Dirac est impossible en pratique (l'instant kT_e est insaisissable matériellement).
- ✓ La récupération de $s(t)$ à partir des échantillons est une sommation infinie, donc impossible à réaliser.

Le prélèvement d'un échantillon dure en réalité un certain temps τ :


Fig.7

Cela signifie que l'échantillonnage réel est la multiplication du signal analogique (supposé *causal* : nul pour t négatif) par le signal $\sum_{k=0}^{+\infty} \text{rec}\left(\frac{t - q/2 - kT_e}{q}\right)$ qui est un train, périodique de période T_e , d'impulsions rectangulaires de durée q .

En notant $g(t) = \text{rec}\left(\frac{t}{q} - 1/2\right)$, dont le spectre de Fourier est $G(f) = qe^{-j2\pi f q/2} \text{sinc}[qf]$, le spectre du signal échantillonné devient :

$$Y(f) = qF_e \sum_k e^{-j2\pi k F_e q/2} \text{sinc}(kqF_e) S(f - kF_e) \quad (42)$$

Remarques :

1. Le terme exponentiel correspond à un retard de $q/2$ secondes : On commence l'échantillonnage à l'instant $q/2$ et non à l'instant zéro.
2. Le terme $q F_e = q/T_e$ est décisif quant à la qualité du compromis échantillonnage/résolution fréquentielle : La résolution fréquentielle (pouvoir discerner le spectre à deux fréquences très proches) exige $q F_e$ faible et l'échantillonnage exige F_e important et q faible.

III. RECONSTITUTION du SIGNAL ANALOGIQUE

On se propose de reconstituer pratiquement le signal analogique $s(t)$ à partir de ses échantillons $s(kT_e)$. Cette reconstitution est dans tous les cas approximative. Lorsque la méthode est linéaire on parle de *filtre de lissage*. Nous traitons ici deux méthodes linéaires de restitution.

1. Extrapolation d'ordre zéro (Bloqueur)

Dans cette méthode on réceptionne les échantillons à la cadence T_e . Entre kT_e et $(k+1)T_e$ le signal reconstruit $y(t)$ prend la même valeur $s(kT_e)$:

$$\begin{aligned} y(t) &= s(t) & \text{si } t &= kT_e \\ y(t) &= s(kT_e) & \text{si } kT_e < t < (k+1)T_e \end{aligned}$$

Pour connaître la réponse impulsionnelle $h(t)$ du bloqueur, il suffit de maintenir l'unique valeur 1 entre 0 et T_e . Ainsi :

$$h(t) = \text{Rec}\left(\frac{t - T_e/2}{T_e}\right) \quad (43.1)$$

Dont la transformée de Fourier est :

$$H(f) = T_e e^{-j2\pi f T_e/2} \text{sinc}[T_e f] \quad (43.2)$$

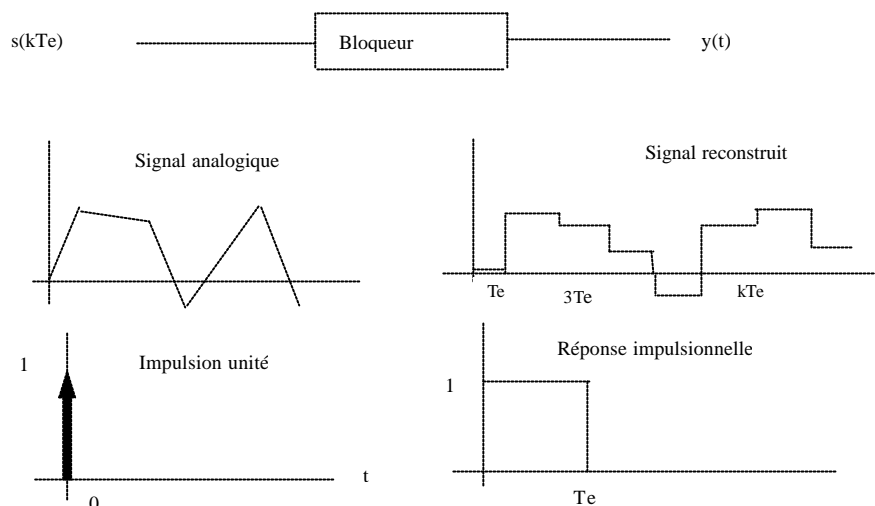


Fig.8

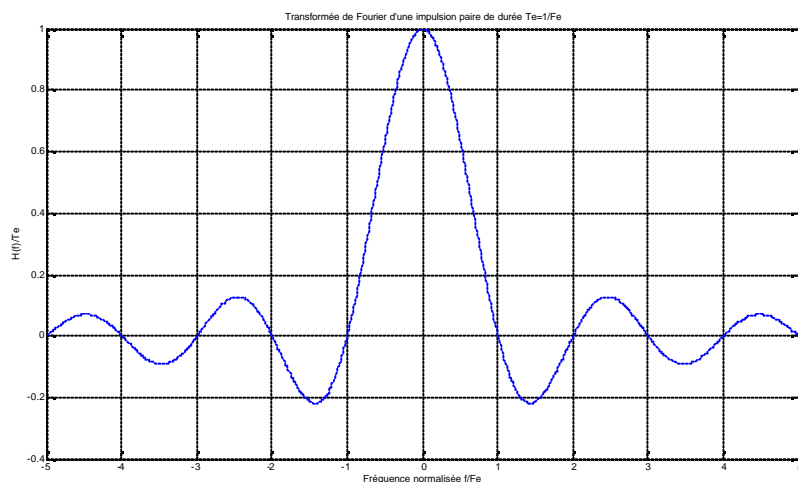


Fig.9

On constate que le bloqueur laisse passer avec une qualité acceptable les signaux dont le spectre est négligeable au-delà de F_e .

Si le théorème de Shannon est respecté, tout le spectre du signal $s(t)$ est récupéré avec un repliement faible au voisinage de F_e . Cependant le fait qu'il agisse comme un passe haut par rapport à la bande utile du signal (B est souvent très faible devant F_e) introduit des distorsions en présence de bruits.

La simplicité et la qualité du bloqueur font qu'il soit très utilisé dans les convertisseurs numérique/analogique.

2. Interpolateur d'ordre un

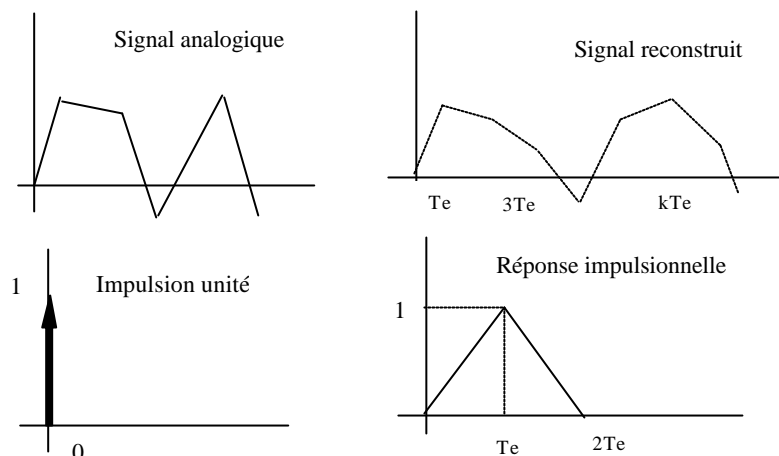


Fig.10

En tolérant un retard de réception de T_e , on peut relier les échantillons par des segments de droites, c'est le principe de l'interpolation linéaire. La réponse impulsionnelle de ce système est :

$$h(t) = \text{tri}\left(\frac{t - T_e}{T_e}\right) \quad (44.1)$$

Dont la réponse fréquentielle est :

$$H(f) = T_e e^{-j2\pi f T_e / 2} \sin^2[T_e f] \quad (44.2)$$

On peut émettre les mêmes remarques concernant le bloqueur à propos de l'interpolateur actuel, sauf que $H(f)$ est plus condensée et plus sélective que celle du bloqueur.

3. Mise en forme

Une chaîne de traitement du signal échantillonné peut être schématisée de la manière suivante :

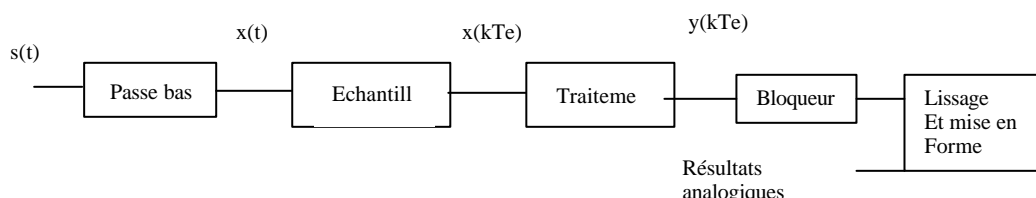


Fig.11

Le signal analogique $s(t)$ possède probablement et dans la majorité des cas une bande spectrale large : la première étape consiste à limiter cette bande par un filtrage passe-bas (mise en forme) afin de pouvoir effectuer l'échantillonnage en respectant le théorème de Shannon.

Une fois le signal échantillonné obtenu, le traitement souhaité peut être effectué sur les échantillons.

La reconstruction des résultats analogiques, de large bande généralement, à partir des échantillons traités nécessite une reconstruction (un bloqueur par exemple) suivie d'un filtrage passe-bas adéquat (lissage) puis d'une mise en forme identique à celle appliquée à l'entrée afin de limiter la largeur de bande.

Ch. IV : SYSTEMES NUMERIQUES

I- SIGNAUX NUMERIQUES

II- SYSTEMES NUMERIQUES LINEAIRES INVARIANTS

III- EQUATION aux DIFFERENCES

I. SIGNAUX NUMERIQUES

1. Définitions

Un signal numérique $x(k) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) \cdot d(m-k)$ est un signal *discret* dont l'amplitude est *quantifiée*. La plage occupée par l'amplitude d'un signal numérique définit *la gamme dynamique* de ce signal.

2. Signaux particuliers

▪ L'impulsion unité

$$\delta(k) = 1 \text{ si } k=0; \delta(k)=0 \text{ si } k \neq 0 \quad (45)$$

▪ Le saut unité

$$e(k) = 0 \text{ si } k < 0; e(k) = 1 \text{ si } k \geq 0 \quad (46)$$

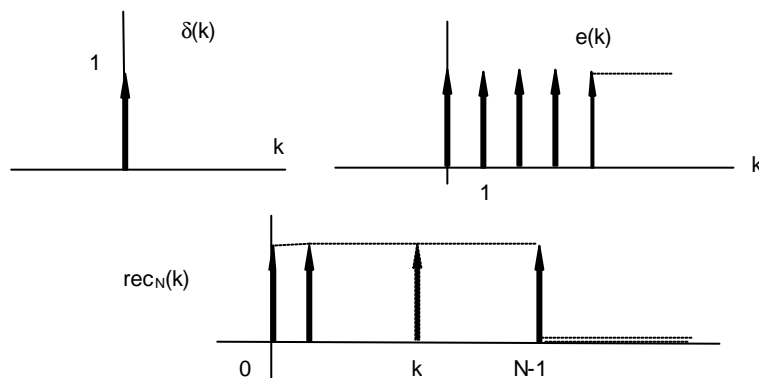


Fig.12

Remarque

$$\delta(k) = e(k) - e(k-1) \quad (47.1)$$

$$e(k) = \sum_{m=0}^{+\infty} \delta(k-m) \quad (47.2)$$

▪ Fenêtre rectangulaire

$$\text{rec}_N(k) = 1 \text{ si } 0 \leq k < N-1 \quad (48.1)$$

$$\text{rec}_N(k) = 0 \text{ si } k < 0 \text{ ou } k \geq N \quad (48.2)$$

Remarque

$$\text{rec}_N(k) = e(k) - e(k-N) \quad (49)$$

$$\text{rec}_N(k) = \sum_{m=0}^{N-1} \delta(k-m) \quad (50)$$

▪ Sinusoïde numérique

$$\sin(k) = A \cdot \sin(2\pi k/N - \varphi), \quad \varphi = 2\pi k_0/N \quad (51)$$

Elle est périodique en k, de période N.

3. Energie et Puissance

Signaux à énergie finie
$$E_x = \sum_{k=0}^{N-1} x^2(k) \quad (52.1)$$

Signaux à puissance moyenne finie
$$P_x = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{m=-K/2}^{K/2-1} x^2(m) \quad (52.2)$$

Les signaux $x(k)$ aléatoires sont considérés à puissance moyenne finie $E[x^2(k)]$.

II. SYSTEMES NUMERIQUES LINEAIRES INVARIANTS

1. Définitions

Un système numérique est un système qui agit sur des signaux numériques en produisant des signaux numériques exclusivement. On note $\mathbf{S}[x(k)]$ la sortie $y(k)$ du système lorsque l'entrée est $x(k)$.

Un système numérique linéaire et invariant (SNLI) obéit aux règles suivantes :

$$\mathbf{S}[a \cdot x_1(k) + b \cdot x_2(k)] = a \cdot \mathbf{S}[x_1(k)] + b \cdot \mathbf{S}[x_2(k)] \quad (\text{linéarité}) \quad (53.1)$$

$$\text{si } \mathbf{S}[x(k)] = y(k) \text{ alors } \mathbf{S}[x(k-k_0)] = y(k-k_0) \quad (\text{invariance}) \quad (53.2)$$

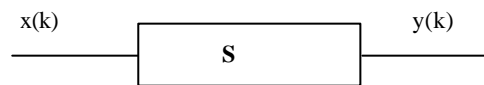


Fig.13

2- Réponse impulsionnelle

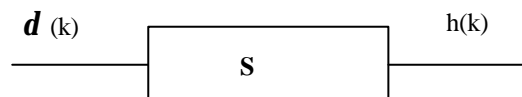


Fig.14

On démontre que pour un SNLI il existe un signal $h(k)$ tel que la réponse $y(k)$ du système à tout signal $x(k)$ soit la convolution :

$$y(k) = h(k) * x(k) = \sum_m h(m)x(k-m) \quad (54)$$

$h(k)$ est le signal de sortie du SNLI avec comme entrée $x(k) = \delta(k)$, d'où l'appellation réponse impulsionnelle du système (RI).

3 Réponse fréquentielle

La réponse fréquentielle (RF) d'un SNLI est la transformée de Fourier $H(f)$ de $h(k)$. Avec une période d'échantillonnage T_e :

$$H(f) = \sum_k h(kT_e) e^{-j2\pi f k T_e} \quad (55)$$

Cette fonction est définie pour la variable *continue* f . Cette forme analogique de la réponse fréquentielle n'est pas utilisée, notons tout simplement qu'elle est périodique de période F_e (d'ailleurs l'expression ci-dessus est le développement en série de Fourier de $H(f)$). On verra dans les chapitres suivants les modifications à apporter à $H(f)$ pour la rendre *numérique* et par la suite exploitable en pratique. On vérifie facilement la relation entrée/sortie :

$$Y(f) = H(f) \cdot X(f) \quad (56)$$

Rappelons qu'en vertu du théorème de Parseval, l'énergie de $h(k)$ vaut la puissance moyenne de $H(f)$ (dualité temps/fréquence) :

$$\frac{1}{T_e} \sum_k h^2(k) = \int_0^{F_e} |H(f)|^2 df \quad (57)$$

4. Causalité, Stabilité

▪ Causalité

Un signal $x(k)$ est dit causal si sa valeur est nulle pour tout k strictement négatif. De même un SNLI est dit causal si sa réponse impulsionnelle est causale.

▪ Stabilité

Un SNLI est stable si sa réponse à un signal de gamme dynamique *bornée* est un signal de gamme dynamique *bornée*. En termes pratiques, un système est stable si sa sortie ne dégénère pas, l'entrée étant un signal ordinaire.

▪ Théorème

Un SNLI de réponse impulsionnelle $h(k)$ est stable si et seulement si :

$$\sum_k |h(k)| \text{ est fini} \quad (58)$$

5. Exemples

1. On considère le signal $x(k) = \text{recN}(k + N/2)$; On suppose $T_e = 1$.

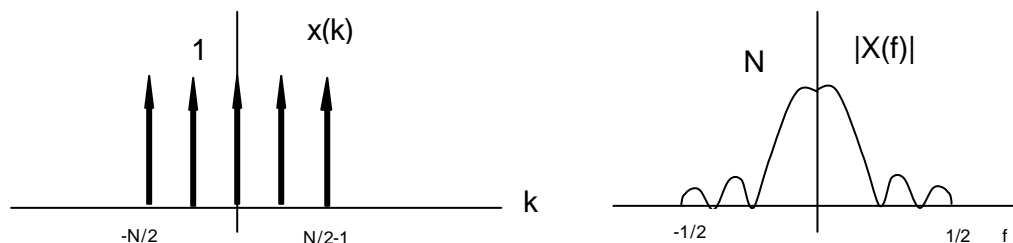


Fig.15

Sa TF est donnée par :

$$X(f) = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} e^{-j2\pi f k}$$

$$X(f) = e^{j\pi f N} \frac{\sin(\pi f N)}{\sin(\pi f)} \quad (59)$$

2. La TF du signal retardé $x(k-k_0)$ est donnée par :

$$Y(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[(k-k_0)T_e] e^{-j2\pi f k T_e}$$

$$Y(f) = e^{-j2\pi f k_0 T_e} X(f) \quad (60)$$

3. On considère un SNLI dont la RI est $h(k)=a^k e(k)$, avec $|a|<1$.

On cherche la réponse du système à l'excitation $x(k)=\text{recN}(k)$.

$$\text{pour } 0 \leq k < N : y(k) = \frac{1-a^{k+1}}{1-a} \quad (61.1)$$

$$\text{pour } N \leq k : y(k) = a^k \frac{1-a^{-N}}{1-a^{-1}} \quad (61.2)$$

III. Equations aux différences

Un système peut être entièrement défini par la donnée de sa réponse RI $h(k)$ ou sa RF $H(f)$. On peut aussi le définir par la donnée d'une relation de récurrence entre les entrées et les sorties successives respectivement.

1. Définition

$x(k)$ et $y(k)$ étant l'entrée et la sortie d'un SNLI, on dit que le système est régi par une équation aux différences linéaire à coefficients constants d'ordre N si :

$$\sum_{n=0}^N a_n y(k-n) = \sum_{m=0}^M b_m x(k-m) \quad (62)$$

Remarques :

- C'est la version discrète des équations différentielles linéaires à coefficients constants, la dérivée dx/dt étant remplacée par la différence $[x(k)-x(k-1)]/T_e$.
- On doit disposer des M entrées $x(0) \dots x(M-1)$ et des N sorties $y(0) \dots y(N-1)$ pour pouvoir démarrer le calcul itératif de $y(k)$.
- Implémentabilité algorithmique : On peut résoudre l'équation avec les opérateurs élémentaires $+$ et \times uniquement.

Exemple :

On considère l'équation aux différences de premier ordre :

$$y(k) = x(k) - a.y(k-1) \quad (63)$$

avec la condition initiale :

$$y(k) = 0 \text{ pour } k < 0$$

on cherche la réponse du système à l'excitation $x(k)=e(k)$ ($y(k)$ est appelée réponse indicielle du système).

On obtient d'une manière itérative :

$$y(0) = 1 - a.y(-1) = 1$$

$$y(1) = 1 - a.y(0) = 1 - a$$

$$y(2) = 1 - a + a^2$$

Et finalement :

$$y(k) = \frac{1 - (-a)^{k+1}}{1 + a} e(k) \quad (64)$$

Avec d'autres conditions initiales on aurait obtenu un autre résultat.

La réalisation pratique de ce système nécessite un additionneur, un retard (T_e) et un multiplicateur.

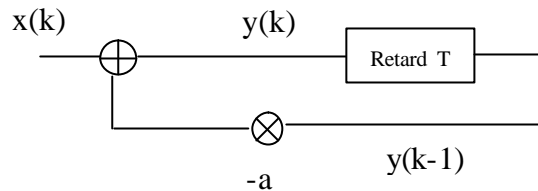


Fig.16

2. Réponse fréquentielle

A partir de l'équation aux différences, en prenant les TF, on obtient la relation ($T_e=1$) :

$$Y(f) \cdot \sum_{n=0}^N a_n e^{-j2\pi f n} = X(f) \cdot \sum_{m=0}^M b_m e^{-j2\pi f m}$$

$$H(f) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m e^{-j2\pi f m}}{\sum_{n=0}^N a_n e^{-j2\pi f n}} \quad (65)$$

Ou encore :

Exemple :

Le système de premier ordre $y(k) = x(k) - ay(k-1)$ a pour RF :

$$H(f) = \frac{1}{1 + ae^{-j2\pi f}} \quad (66)$$

$H(f)$ est périodique de période 1.

Les spectres de phase et d'amplitude s'écrivent pour $0 \leq f \leq 0.5$:

$$\mathbf{j}(f) = A \tan g \frac{a \sin(2\pi f)}{1 + a \cos(2\pi f)} \quad (67.1)$$

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{(1 + a \cos(2\pi f))^2 + a^2 \sin^2(2\pi f)}} \quad (67.2)$$

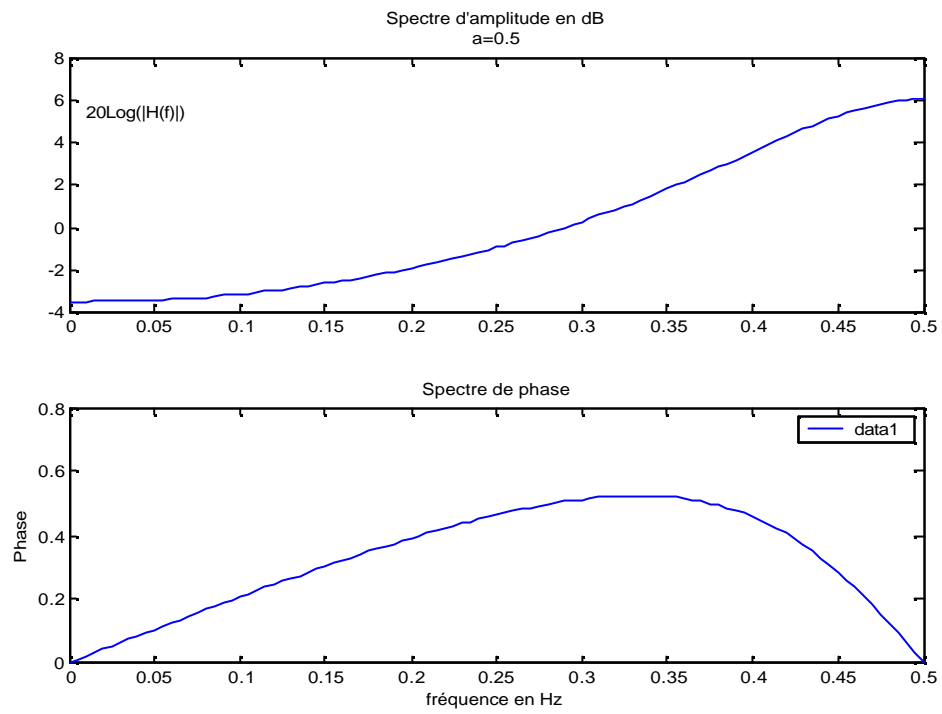


Fig.17

Ch. V : TRANSFORMATION DE FOURIER DISCRETE

I-	INTRODUCTION
II-	EFFETS de LA DISCRETISATION de LA FREQUENCE
III-	TFD d'un SIGNAL à DUREE LIMITEE
IV-	PROPRIETES de LA TFD
V-	TFD des SIGNAUX A DUREE ILLIMITEE
VI-	APPROXIMATION de LA TF des SIGNAUX ANALOGIQUES

I- INTRODUCTION

Soit $x(kT_e)$ un signal échantillonné. On peut l'écrire sous la forme étendue suivante :

$$x(t) = \sum_k x(kT_e) \delta(t - kT_e) \quad (68)$$

Sa transformée de Fourier est la fonction de la variable continue f :

$$X(f) = \sum_k x(kT_e) e^{-j2\pi f k T_e} \quad (69)$$

La transformation inverse s'écrit :

$$x(kT_e) = \frac{1}{T_e} \int_{\mathbb{R}} X(f) e^{j2\pi f k T_e} df \quad (70)$$

Propriétés :

- **$X(f + F_e) = X(f)$**

$X(f)$ est périodique de période F_e . Il suffit d'étudier le comportement de $X(f)$ sur l'intervalle $[-F_e/2, F_e/2]$.

- Dans le cas fréquent d'un signal réel : **$X(-f) = X^*(f)$**
Le module de $X(f)$ est pair et son argument impair. Il suffit d'étudier le comportement de $X(f)$ sur l'intervalle $[0, F_e/2]$.

L'expression de $X(f)$ pose deux problèmes pratiques de taille:

- La fréquence f est une variable *continue*.
- Le nombre d'échantillons $x(kT_e)$ est *illimité*.

Pour pallier à ces deux obstacles et pouvoir utiliser le moyen informatique, il faut absolument :

✱ Discrétiser la fréquence

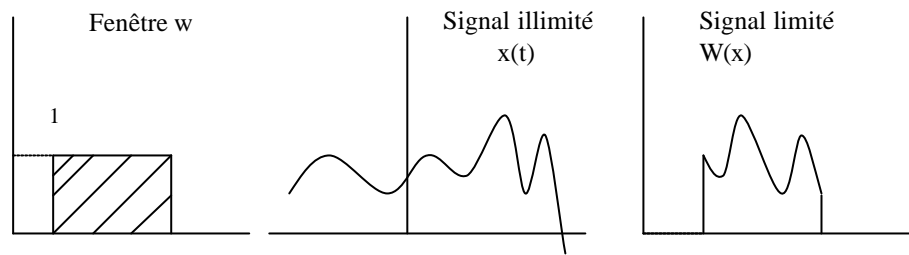
On prélève N fréquences équidistantes parmi $[-F_e/2, F_e/2]$:

$$\mathbf{F} = \mathbf{n} \cdot D, \quad \mathbf{n} = -N/2, \dots, N/2-1; \quad D = F_e/N$$

✱ Limiter la durée de $x(kT_e)$

On applique un fenêtrage $W(x)$ approprié à $x(k)$ et on s'intéresse à la T.F. de $W(x)$. Un exemple simple de limitation :

$$W(x)(k) = \text{rec}_M(kT_e) \cdot x(kT_e) \quad (71)$$


Fig.18

Les effets de ces deux opérations font l'objet principal de la suite de ce chapitre. Dorénavant, pour alléger l'écriture, on posera $T_e=1$.

Notations $\Delta=1/N$, $f=n/N$, $X(n/N)=X(n)$.

La transformée de Fourier discrète s'écrit alors:

$$X(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) e^{-j2\pi nk/N}, \quad -N/2 \leq n \leq N/2-1 \quad (72)$$

II- EFFETS de LA DISCRETISATION de LA FREQUENCE

L'approximation de l'intégrale de Fourier inverse par une sommation donne, après discrétisation :

$$x(k) \approx \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} X(n) e^{j2\pi nk/N} = x_p(k) \quad (73)$$

Exercice : Démontrer cette approximation.

On s'intéresse aux conditions, sur $x(k)$, qui nous permettent de remplacer l'approximation $x(k) \approx x_p(k)$ par une égalité exacte $x(k) = x_p(k)$.

On remarque tout d'abord que $x_p(k)$ est périodique de période N dans la mesure où $X(n)$ l'est aussi.

En étayant l'expression de $X(n)$ dans l'approximation, on obtient :

$$x_p(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) e^{-j2\pi n(m-k)/N} \quad (74.1)$$

En permutant les sommations :

$$x_p(k) = \sum_m x(m) \left[\frac{1}{N} \sum_n e^{-j2\pi n(m-k)/N} \right] \quad (74.2)$$

En posant $\alpha(m) = e^{-j2\pi n(m-k)/N}$ on aura :

$$x_p(k) = \sum_m x(m) \frac{1}{N} \sum_n \alpha^n(m) \quad (75)$$

D'autre part :

$$\sum_n \alpha^n(m) = \frac{1 - \alpha^N(m)}{1 - \alpha(m)} \quad (76)$$

est nul, sauf pour $m-k$ multiple de N , auquel cas c'est égal à N (Démontrer ce résultat).

On obtient finalement :

$$\mathbf{x}_p(\mathbf{k}) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} x(k - pN) \quad (77)$$

Le signal $x_p(k)$ est une réplique (répétition) de période N du signal $x(k)$.

Conclusion

Si la durée du signal $x(k)$ est inférieure à N , il n'y a pas de recouvrement, et sur une période N on peut écrire $x(k) = x_p(k)$.

Autrement, si Le nombre d'échantillons de $x(k)$ dépasse N , un recouvrement a lieu, et on ne doit pas confondre $x(k)$ et $x_p(k)$.

III T.F.D. d'un SIGNAL de DUREE LIMITEE N

Elle s'écrit :

$$X(n) = \sum_{k=k_0}^{k_0+N-1} x(k) e^{-j2\pi nk/N}, \quad n = -N/2, \dots, N/2-1 \quad (78.1)$$

La transformation inverse :

$$x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} X(n) e^{j2\pi nk/N}, \quad k = k_0, \dots, k_0+N-1 \quad (78.2)$$

Ainsi, $X(n)$ étant la TFD du signal $x(k)$, la reconstitution de $x(k)$ à partir de $X(n)$ nécessite la connaissance a priori de l'intervalle $[k_0, k_0+N-1]$ qui contient les échantillons $x(k)$. En général on considère $k_0 = -N/2$ ou $k_0 = 0$.

Remarque

Dans le cas des signaux périodiques, la définition de la TFD prend la même forme, N étant la période du signal et $k_0 = 0$.

IV- PROPRIETES DE LA T.F.D.

▪ Linéarité

Soit $x(k) = a.x_1(k) + b.x_2(k)$, alors $X(n) = a.X_1(n) + b.X_2(n)$

Les coefficients $X(n)$ sont calculés pour $N = \text{Sup}(N_1, N_2)$. A défaut d'échantillons, on complète par des zéros pour des signaux non périodiques.

▪ Corrélation

La corrélation de $x(k)$ et $y(k)$ de même durées N est définie par :

$$R_{xy}(k) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) y(m+k), \quad k=0 \dots N-1 \quad (79)$$

La TFD de la fonction R_{xy} est :

$$\gamma_{xy}(n) = X^*(n) Y(n) \quad (80)$$

▪ Décalage

Posons $y(k) = x(k-k_0)$, avec $k_0 \leq N$. On a :

$$Y(n) = e^{-j2\pi nk_0/N} X(n) \quad (81)$$

▪ Convolution

La convolution de $x(k)$ et $y(k)$ de même durées N est définie par :

$$z(k) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)y(k-m), \quad k=0 \dots 2N-2 \quad (82)$$

La TFD de la fonction $z(k)$, qui a une durée $2N-1$, est :

$$Z(n) = X(n)Y(n) \quad (83)$$

V- TFD des SIGNAUX à DUREE ILLIMITEE

Soit $x(k)$ un signal à durée illimitée et non périodique. La définition de la TFD dans ce cas passe par une limitation dans le temps de l'étendue de ce signal.

Ceci revient à multiplier $x(k)$ par une fenêtre $w(k)$ de largeur N (fenêtre temporelle) pour obtenir un signal à durée limitée $x_w(k)$. Le choix de $w(k)$ se fait de façon à contenir le plus grand nombre d'échantillons importants de $x(k)$.

La transformée de Fourier de $w(k)$ est appelée fenêtre spectrale $W(f)$.

$X(f)$ et $X_w(f)$ étant les TF de $x(k)$ et $x_w(k)$ respectivement, on a :

$$X_w(f) = \int_0^1 X(u)W(f-u)du \quad (84)$$

Ceci découle du fait que la transformée d'un produit égale le produit de convolution des transformées.

La TFD $X_w(f)$ de $x_w(k)$ représente approximativement un échantillonnage de $X(f)$ limité à N coefficients.

Formes de la fenêtre spectrale

$W(f)$, de période 1, est généralement composée d'un lobe central principal autour de zéro et de lobes secondaires qui s'atténuent rapidement avec f . Ainsi pour une fenêtre rectangulaire de largeur $N+1$:

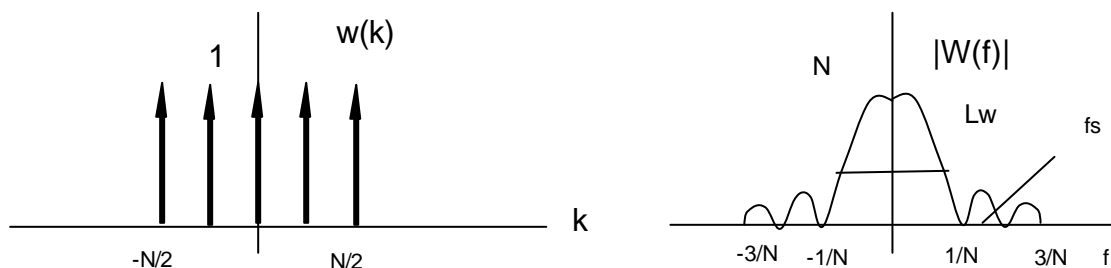


Fig.19

$$w(x) = \text{rec}_N(k+N/2) \text{ avec } -N/2 \leq k \leq N/2$$

$$W(f) = \frac{\sin(\pi f N)}{\sin(\pi f)}$$

On caractérise la fenêtre spectrale par :

- La largeur L_w du lobe principal :

$$L_w = 2/N$$

$$(85.1)$$

Qui dépend de N .

- Le rapport, en dB, r_w entre la valeur $W(f_s)$ du pic du lobe secondaire le plus proche et $W(0)$:

$$r_w = 20 \log \left| \frac{W(f_s)}{W(0)} \right| \quad (85.2)$$

Plus ces deux paramètres sont *faibles*, plus la fenêtre est *intéressante*. L'approximation par $X(n)$ de $X(f)$ fait que des oscillations apparaissent autour des discontinuités de $X(f)$ (*phénomène de Gibbs*).

- Dans le cas de la fenêtre rectangulaire :

$$r_w = 20 \log \left| \frac{1}{4.5} \right| = -13 \text{ dB} \quad (\text{pour } N=9)$$

- Fenêtre de Hamming

$$w(k) = 0.5[1 + \cos(2\pi k/N)] \quad (86)$$

- Fenêtre de Blackman

$$w(k) = a_0 + 2 \sum_{m=1}^L a_m \cos(2\pi k \frac{m}{N}) \quad (87.1)$$

Avec :

$$a_0 + 2 \sum_{m=1}^L a_m = 1 \quad (87.2)$$

Exercice : Visualiser ces trois fenêtres à l'aide de Matlab et observer leurs effets respectifs sur des signaux choisis.

VI- Approximation de la T.F. des signaux analogiques

L'estimation du spectre d'un signal analogique est une discipline cruciale du traitement du signal. La réalisation d'analyseurs de spectre analogiques basses fréquences se fait avec beaucoup de difficultés (stabilité, précision réduite...). Les analyseurs de spectre numériques (quoique leurs bandes soient limitées) présentent plus d'avantages et exploitent l'existence d'algorithmes rapides de calcul de la TFD (FFT) pour estimer la TF des signaux analogiques.

1. Signaux périodiques

Soit $x_p(t)$ un signal périodique de période T_0 et $x_p(t, T_0)$ sa restriction à l'intervalle $[0, T_0]$ dont la TF est notée $X_p(f, T_0)$.

La TF de $x_p(t)$ est l'échantillonnage fréquentiel, avec une cadence $F_0 = 1/T_0$, de $X_p(f, T_0)$:

$$X_p(nF_0) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x_p(t) e^{-j2\pi n F_0 t} dt \quad (88.1)$$

$$x_p(t) = \sum_n X_p(nF_0) e^{j2\pi n F_0 t} \quad (88.2)$$

Les fréquences nF_0 définissent *les harmoniques*.

Opérons un échantillonnage du signal périodique $x_p(k)$ avec une cadence $T_e = 1/F_e = T_0/N$ de façon à prélever N valeurs $x_p(k)$, $0 \leq k \leq N-1$.

La TFD de $x_p(k)$ est la répétition de période F_e de $X_p(nF_0)$.

On suppose que N englobe *le spectre utile* de $x_p(t)$. Le théorème d'échantillonnage exige $NF_0 \leq F_e$, ce qui est vérifié par $T_e = T_0/N$.

L'approximation de l'intégrale par une sommation discrète donne :

$$X_p(nF_0) \approx \frac{1}{T_0} \sum_{k=0}^{N-1} x(kT_e) e^{-j2\pi n F_0 k T_e} \quad (89.1)$$

$$X_p(nF_0) \approx \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(kT_0 / N) e^{-j2\pi n k / N} \quad (89.2)$$

Qui s'identifie à la TFD de $x_p(k)$ au facteur $1/N$ près.

On peut conclure immédiatement :

La TFD des échantillons d'un signal périodique donne la TF du signal analogique correspondant en plus d'autres échantillons de la TF d'une période du signal considéré.

2. Signaux à énergie finie

La transformée de Fourier d'un signal analogique $x_a(t)$ s'écrit:

$$X_a(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_a(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$x_a(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X_a(f) e^{j2\pi f t} df$$

Opérons un échantillonnage de $x_a(t)$ de pas Δt ; L'approximation de la TF donne :

$$X_a(f) \approx \Delta t \sum_k x_a(k\Delta t) e^{-j2\pi f k \Delta t} \quad (90)$$

Opérons maintenant un échantillonnage de $X_a(f)$ de pas Δf ; L'approximation ci-dessus et son inverse deviennent :

$$X_a(n\Delta f) \approx \Delta t \sum_k x_a(k\Delta t) e^{-j2\pi n k \Delta f \Delta t} \quad (91.1)$$

$$x_a(k\Delta t) \approx \Delta f \sum_n X_a(n\Delta f) e^{j2\pi n k \Delta f \Delta t} \quad (91.2)$$

Le théorème d'échantillonnage ne pouvant être respecté à la fois pour Δt et Δf ($x_a(t)$ et $X_a(f)$ ne peuvent être à supports bornés simultanément), un repliement de spectre est inévitable.

Posons $N=1/(\Delta f \cdot \Delta t)$ soit, $\Delta f=1/(N \cdot \Delta t)=1/T$ où $N \cdot \Delta t=T$ est la durée d'observation du signal analogique. Les deux signaux numériques $x_a(k\Delta t)$ et $X_a(n\Delta f)$ sont périodiques de même période N . Finalement les approximations s'écrivent :

$$X_a(n) \approx \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} x_a(k) e^{-j2\pi n k / N} \quad (92.1)$$

$$x_a(k) \approx \frac{1}{N\Delta t} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} X_a(n) e^{j2\pi n k / N} \quad (92.2)$$

Ce sont les approximations des TF intégrales directe et inverse d'un signal analogique. On remarque que c'est la TFD à des facteurs multiplicatifs près.

Remarques

- La TFD d'un signal numérique est périodique de période N , la TF est périodique de période $1/\Delta t$.
- Résolution spectrale (fréquentielle) :
Plus la durée d'observation T est grande, plus l'écart entre les composantes fréquentielles $X_a(n/T)$ est faible et plus la TF $X_a(f)$ est approchée par la TFD.

Ch. VI : TRANSFORMEE DE FOURIER RAPIDE (FFT)

- I- Mise en forme
- II- Algorithme
- III- Mise en oeuvre
- IV- Organigramme et programme

La Transformée de Fourier rapide ou TFR (due à COOLEY&TUKEY et plus connue sous le nom anglais *Fast Fourier Transform* ou FFT) est la plus importante des transformations utilisée par la communauté des traiteurs de signaux. Son importance est due non seulement au rôle qu'elle joue en traitement digital des signaux, mais aussi a la possibilité de pouvoir l'utiliser dans plusieurs domaines scientifiques. Son expression mathématique n'est pas différente de la **TFD**. Elle est tout simplement un algorithme : un moyen efficace et économique pour calculer la TFD.

I- Mise en forme la TFD :

Nous avons vu que la transformée de Fourier discrète d'un signal $x(n)$ s'écrit :

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j2\pi \frac{k}{N}n} \quad n = 0, 1 \dots N-1 \quad (93)$$

• Notation:

On définit :

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} = \cos\left(\frac{2\pi}{N}\right) - j.\sin\left(\frac{2\pi}{N}\right) \quad (94)$$

Les puissances de W_N pour $n \in [0, \dots, N-1]$ divisent le cercle unité en N angles égaux :

$$W_N^n = e^{-jn\frac{2\pi}{N}} = \cos\left(n\frac{2\pi}{N}\right) - j.\sin\left(n\frac{2\pi}{N}\right) \quad (95)$$

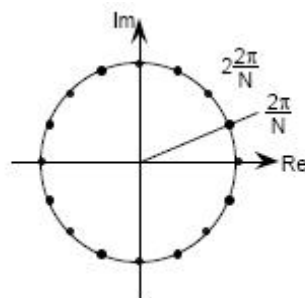


Fig.20

Le facteur W_N (facteur de rotation) vérifie :

- $|W_N| = 1$
- Périodicité : $W_N^{k+N} = W_N^k$
- Symétrie : $W_N^{k+\frac{N}{2}} = -W_N^k$

- Puissance : $W_N^2 = W_{\frac{N}{2}}$

La TFD peut alors s'écrire :

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} \quad (96)$$

Si on sépare les éléments d'ordre *pair* et *impair*, on obtient :

$$X(n) = \sum_{k \text{ pair}} x(n) W_N^{nk} + \sum_{k \text{ impair}} x(n) W_N^{nk}$$

Ou encore :

$$\begin{aligned} X(n) &= \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2k) W_N^{2kn} + \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2k+1) W_N^{(2k+1)n} \\ &= \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2k) (W_N^2)^{kn} + W_N^n \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2k+1) (W_N^2)^{kn} \end{aligned}$$

Soit :

$$X(n) = \sum_{K=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2k) W_{\frac{N}{2}}^{nK} + W_N^n \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2k+1) W_{\frac{N}{2}}^{kn} \quad (97.1)$$

Ou encore :

$$X(n) = G(n) + W_N^n H(n) \quad (97.2)$$

$G(n)$ étant la TFD de la suite constituée des éléments d'ordre **pair** de $x(n)$; $H(n)$ est la TFD de la suite constituée des éléments d'ordre **impair** de $x(n)$.

Bien que n varie de 0 à $N-1$, $G(n)$ et $H(n)$ ne seront calculées que pour $N/2$ valeurs du moment qu'elles sont périodiques de période $N/2$.

Ainsi apparaît l'idée de base de la FFT qui est de décomposer une TFD d'ordre N en plusieurs TFD d'ordres inférieurs car on peut vérifier dans ce cas que le nombre d'opérations effectué est plus réduit.

II- Algorithme de la FFT

Traitons le cas $N=8$: $G(n)$ et $H(n)$ étant périodiques de période 4, on a :

$$G(7) = G(3), H(7) = H(3) \quad (98)$$

Ce qui donne l'expression suivante de $X(7)$:

$$X(7) = G(7) + W_8^7 H(7) = G(3) + W_8^7 H(3) \quad (99)$$

Cette démarche peut être représentée sur le diagramme ci-dessous (cas $N=8$).

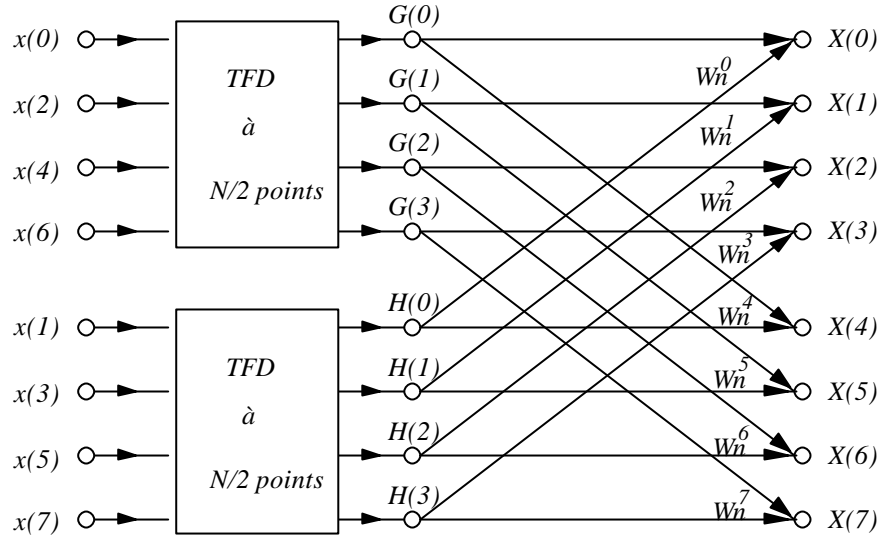


Fig.21 : Décomposition d'une TFD d'ordre 8 en 2 TFD d'ordre 4

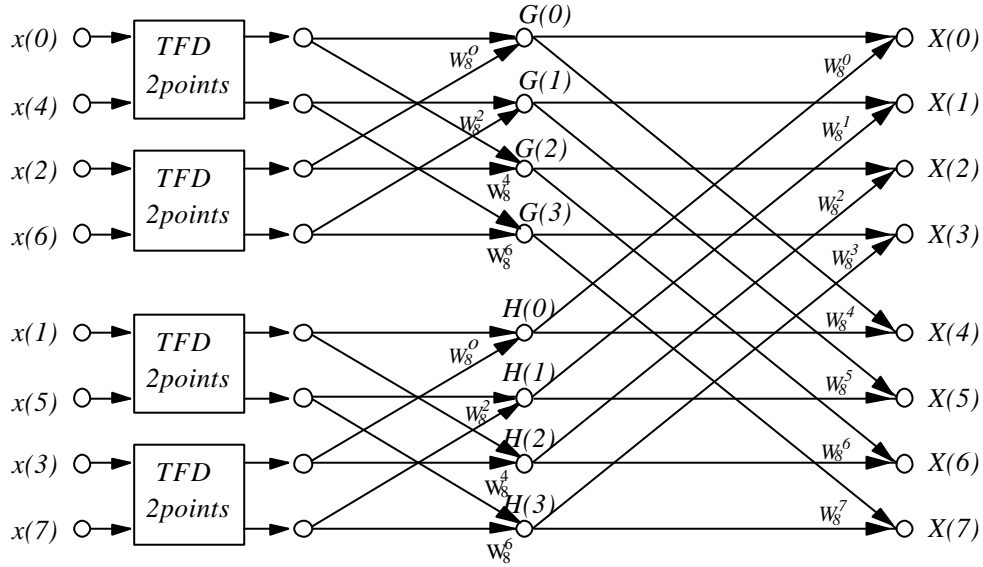


Fig. 22 : Décomposition d'une TFD d'ordre 8 en 4 TFD d'ordre 2

En appliquant la même procédure que précédemment, nous pouvons de nouveau décomposer les TFD à 4 points en des TFD à 2 points. Pour cela il faut que $N/2$ soit pair, ce qui est toujours le cas si on a pris le soin de prendre un nombre N qui est une puissance de 2. On obtient (Fig.22) :

$$G(n) = \sum_{K=0}^{\frac{N}{2}-1} g(2k)W_{\frac{N}{2}}^{nK} + W_{\frac{N}{2}}^n \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} g(2k+1)W_{\frac{N}{2}}^{kn} \quad (100.1)$$

$$H(n) = \sum_{K=0}^{\frac{N}{2}-1} h(2k)W_{\frac{N}{2}}^{nK} + W_{\frac{N}{2}}^n \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} h(2k+1)W_{\frac{N}{2}}^{kn} \quad (100.2)$$

La TFD élémentaire à deux points s'écrit :

$$X(n) = x(0)W_2^0 + x(1)W_2^n \quad (101)$$

$$\begin{cases} X(0) = x(0)W_2^0 + x(1)W_2^0 \\ X(1) = x(0)W_2^0 + x(1)W_2^1 \end{cases}, k=1 \quad (102)$$

Sachant que $W_2^0 = 1$ et $W_2 = -1$ on obtient le graphe ci-dessous connu sous le nom de **papillon** :

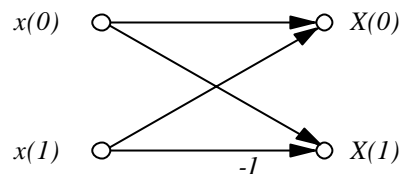


Fig. 23 : Papillon d'une TFD à 2 points

En injectant cette structure dans le graphe de la figure précédente on obtient :

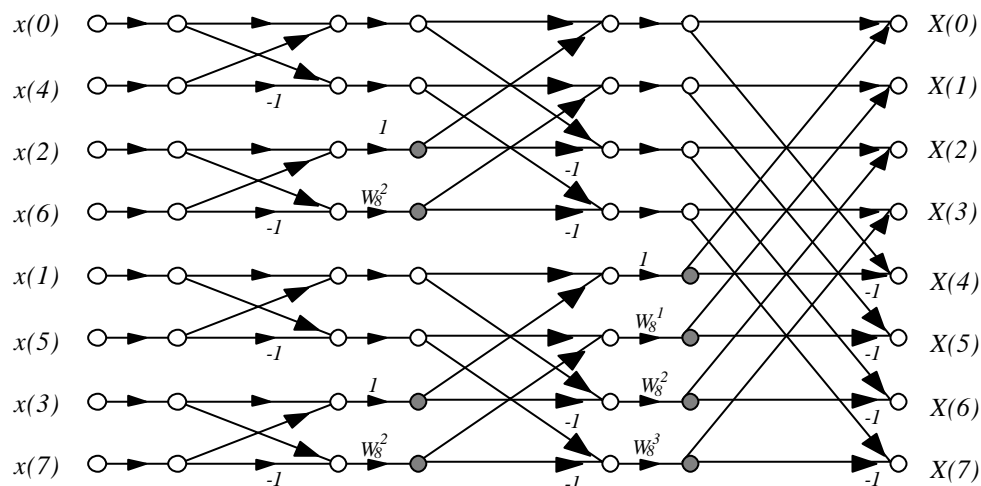


Fig. 24 : Algorithme FFT pour N=8

Bien que ce graphe paraisse assez simple, l'élaboration d'un algorithme général fonctionnant pour toutes les valeurs de N n'est pas sans difficultés.

III- Mise en œuvre de l'algorithme

On remarque d'abord que la séquence d'entrée n'est pas ordonnée, il faut donc commencer par écrire un algorithme réalisant ce classement, dit classement binaire inversé. En effet, on remarque que si on écrit les indices ordonnés en binaire et si on inverse l'ordre de droite à gauche, on obtient le classement recherché.

indices non classés	Binaire	Binaire inversé	indices classés
0	000	000	0
1	001	100	4
2	010	010	2
3	011	110	6
4	100	001	1
5	101	101	5
6	110	011	3
7	111	111	7

On pourrait utiliser cette propriété pour écrire un algorithme de classement mais nous avons préféré écrire un algorithme qui retrace la démarche qui consiste à décomposer une TFD en d'autres TFD d'ordre plus faible.

Cette démarche est la suivante :

- On part de la séquence initiale $x(n)$ avec les indices non classés (dans l'ordre) et on construit deux séquences, l'une contenant les éléments d'ordre (d'indice) impair et l'autre les éléments d'ordre pair.
- On refait la même opération avec chaque séquence jusqu'à ce qu'on obtienne des séquences à deux éléments.

Exemple pour N=8 :

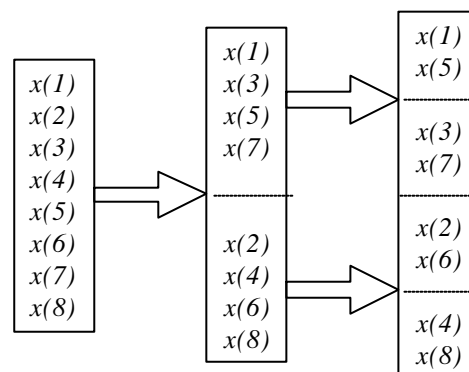


Fig. 25 : Démarche de l'algorithme de classement

Pour la commodité de programmation sur MATLAB, les indices commencent à 1 et non à 0.

Remarque :

- La première séquence (étage) contient 1 paquet de 8
- Le deuxième étage contient 2 paquets de 4
- Le troisième étage contient 4 paquets de 2

D'une façon générale :

- Le nombre d'étage est n tel que $N = 2^n$

- Le nombre de paquets par étage est $l = 2^i$, i est l'indice de l'étage, on ne traite que $n-1$ étage, le dernier étage est déjà classé ($i = 0, 1, \dots, n-2$)
- La taille des paquets de l'étage i est $M = N/l$
- Les indices de début et de fin du paquet k sont $d = (k-1)*M+1$, $f = d+M-1$

étage ($i=0:1$)	0	1
nombre de paquets ($l = 2^i$)	1	2
Taille paquet ($M=8/l$)	8	4
indice début et fin paquet	1 paquet	2 paquets ($k=1:2$)
($d = (k-1)*M+1$)	$d = 1$	$k=1 \rightarrow d=1, f=4$
($f = d+M-1$)	$f = 8$	$k=2 \rightarrow d=5, f=8$

Maintenant on peut entamer l'algorithme de la FFT proprement dit. En observant le graphe de la figure (**fig.**), on peut déterminer une démarche générale pour le calcul d'une TFR à N points :

- Le graphe est constitué de n étages tels que $N = 2^n$
- L'étage k contient M paquets de papillons tels que $M = 2^{n-k}$
- Les points des papillons de l'étage k sont séparés de $p = 2^{k-1}$ (Taille des papillons)
- Si on observe l'exemple $N=8$ (
- Fig.), le 3^{me} étage est constitué d'un paquet de 4 papillons de taille 4. Chaque papillon 'possède' un coefficient écrit devant son coin bas-gauche. On remarque que les 4 coefficients sont les puissances d'un coefficient de base qui est dans ce cas, W_8^1 , les 4 coefficients sont $(W_8^1)^0$ $(W_8^1)^1$ $(W_8^1)^2$ $(W_8^1)^3$.
- On peut maintenant généraliser et dire que le coefficient de base de chaque étage est $W_B = W_N^{\frac{N}{2^p}} = \left(W_N^{\frac{N}{2}}\right)^{\frac{1}{p}} = (-1)^{\frac{1}{p}}$ et au papillon i de chaque paquet correspond le coefficient $(W_B)^{i-1}$.

On remarque que le premier coefficient d'un paquet est toujours 1 puisque c'est toujours $(W_B)^0$, On commence donc avec un coefficient $W=1$, et à chaque changement de papillon, on multiplie le coefficient par W_B .

IV- Organigramme et programme FFT

Si on note x la séquence d'entrée d'un étage et X sa séquence de sortie, on obtient l'algorithme suivant :

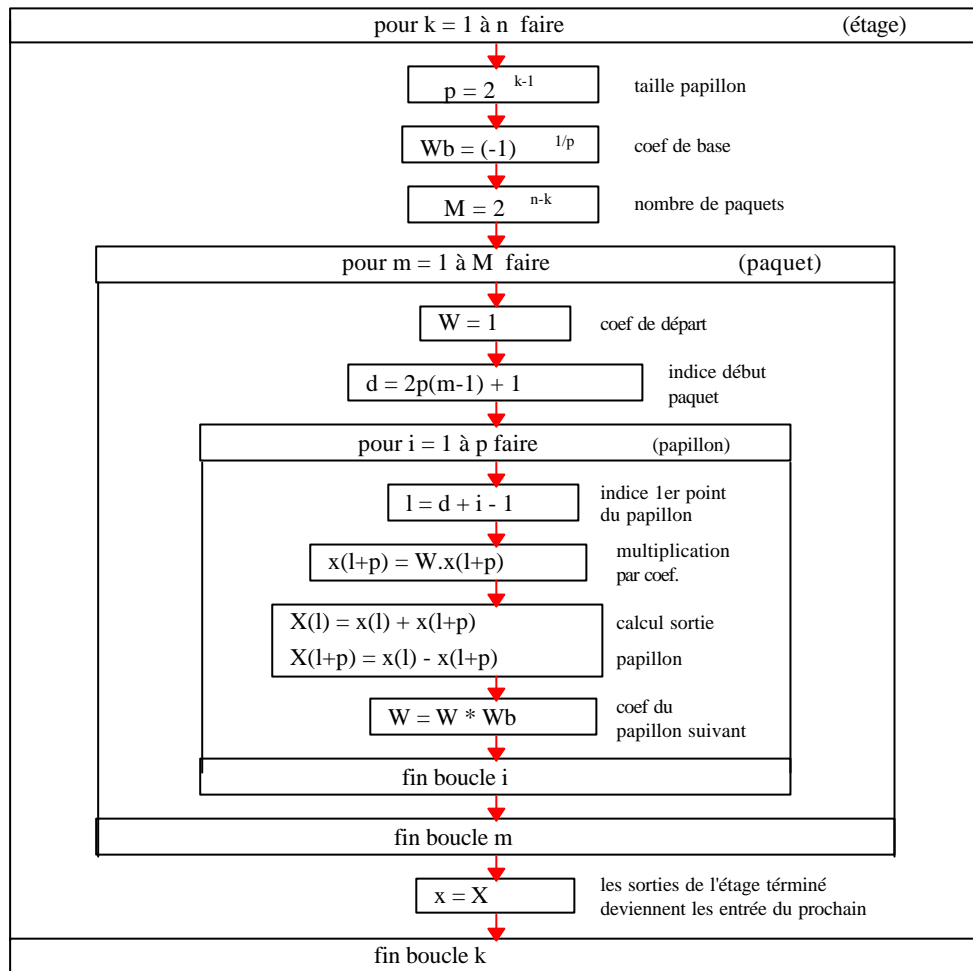


Fig.26 : Organigramme de l'algorithme de la FFT

Voici la transcription sous MATLAB des deux fonctions précédentes :

```

function y=bitrvrs(x);
x=x(:);
N=length(x);
n=log2(N);
for i = 2.^(0:n-2) % nombre de paquet à chaque passage
    y=[];
    M=N/i; % taille du paquet
    for k=1:i % traitement paquet par paquet
        d=(k-1)*M+1; % début du paquet
        f=d+M-1; % fin du paquet
        y=[y; x(d:2:f); x(d+1:2:f)]; % les éléments impairs puis paires
    end;
    x=y; % pour le prochain passage
end;

```

```

function X=myfft(x)
N=length(x);
n=log2(N);
if ~ (N == 2^n)
    disp('pour l'instant cet algorithme ne fonctionne que pour N=puissance de 2');
    return;
end;

```



```

end;
x=x(:);% Classement
x=bitrvrs(x);
X=zeros(size(x));
for k = 1 : n                                %indice des étages
    p = 2^(k-1);                             % le pas entre points de chaque butterfly
    Wb = (-1)^(1/p);                          % coefficient de base
    M = 2^(n-k);                             % nombre de paquets de butterfly
    for m = 1 : M                             % indice paquet
        W=1;                                 % coefficient de départ
        d = (m-1)* 2*p+1;                   % indice debut paquet
        for i = 1 : p                       % indice butterfly dans paquet
            l = d+i-1;                      % indice 1er point du butterfly
            x(l+p)= W*x(l+p);
            X(l) = x(l) + x(l+p);
            X(l+p) = x(l) - x(l+p);
            W = W * Wb;                     % pour le prochain passage
        end;
    end;
    x = X;                                  % les sorties de cet étage = entrées étage suivant
end;

```

Exemples d'exécution de myfft : X=myfft ([0 4 1 8 5 6 9 8])

X =
 41.0000 -6.4142 - 9.4142i -5.0000 - 6.0000i -3.5858 + 6.5858i
 -11.0000
 -3.5858 - 6.5858i -5.0000 + 6.0000i -6.4142 + 9.4142i

• Y=myfft ([1 5 9 8])

Y =
 23.0000
 -8.0000 - 3.0000i
 -3.0000
 -8.0000 + 3.0000i

Ch. VII : MODULATIONS NUMERIQUES

I-	Introduction
II-	Principe de modulations numériques
III-	Modulation ASK
IV-	Modulation PSK
V-	Modulation QAM
VI-	Modulation FSK
VII-	Applications

I- Introduction

On se propose d'envoyer un flux de données $\{c_k = a_k + j.b_k\}$ à partir d'un émetteur et vers un récepteur. Le milieu de transmission qui sépare l'émetteur et le récepteur peut être un câble, une fibre optique ou un canal radioélectrique.

La modulation consiste à adapter les données ou le signal à émettre au canal de transmission ; Ceci en modifiant les paramètres d'une onde, dite porteuse, centrée sur la bande passante du canal.

La porteuse étant $s(t) = A \cdot \cos(2\pi f_0 t + \phi_0)$, les paramètres qui peuvent être modifiés pour porter les données sont :

- L'amplitude A : On parle de modulation par déplacement d'amplitude (ASK : *Amplitude Shift Keying*).
- La phase ϕ_0 : On parle de modulation par déplacement de phase (PSK : *Phase Shift Keying*).
- La fréquence f_0 : On parle de modulation par déplacement de fréquence (FSK : *Frequency Shift Keying*).

II- Principes de modulations numériques

1- Formulation générale

Les données à transmettre, étant issues d'une source binaire, sont codées et mises sous forme d'un signal appelé signal modulant en bande de base :

$$c(t) = \sum_k c_k(t) \quad (103.1)$$

$$c(t) = a(t) + j.b(t) \quad (103.2)$$

$$c_k(t) = c_k \cdot \text{Re } c_T(t - kT) \quad (103.3)$$

$$c_k = a_k + j.b_k$$

Les modulations ASK et PSK transforment le signal $c(t)$ pour donner le signal modulé :

$$m(t) = \text{Re} \left[\sum_k c_k(t) \cdot e^{j(\omega_0 t + \phi_0)} \right] \quad (104.1)$$

$$m(t) = a(t) \cdot \cos(\omega_0 t + \phi_0) - b(t) \cdot \sin(\omega_0 t + \phi_0) \quad (104.2)$$

$a(t)$ module la porteuse en phase $\cos(2\pi f_0 t + \phi_0)$ et $b(t)$ module la porteuse en quadrature $\sin(2\pi f_0 t + \phi_0)$: On les appelle composante en phase (I) et composante en quadrature (Q).

2- L'alphabet

Les symboles a_k et b_k prennent leurs valeurs respectivement dans l'ensemble ou l'alphabet $\{A_1, \dots, A_M\}$ et $\{B_1, \dots, B_M\}$. La transmission est dite M-aire.

Pour $M=2$ la transmission est binaire, c'est-à-dire que a_k et b_k prennent l'une des valeurs 0 ou 1.

3- La constellation

A chaque symbole émis correspond un signal élémentaire :

$$m_k(t) = a_k \cdot \text{Re } c_T(t-T) \cdot \cos(\omega_0 t + \mathbf{j}_0) - b_k \cdot \text{Re } c_T(t-T) \cdot \sin(\omega_0 t + \mathbf{j}_0) \quad (105)$$

Une représentation dans le plan complexe faisant correspondre à chaque signal élémentaire $m_k(t)$ un point $C_k = A_k + B_k$ s'appelle une constellation (Elle comporte autant de points que l'alphabet). Elle nous permettra de différencier les types de modulations.

C_k est le phaseur de $m_k(t)$: son module est \sqrt{E} , E étant l'énergie de $m_k(t)$ et sa phase celle de $m_k(t)$. $e^{-j\omega_0 t}$.

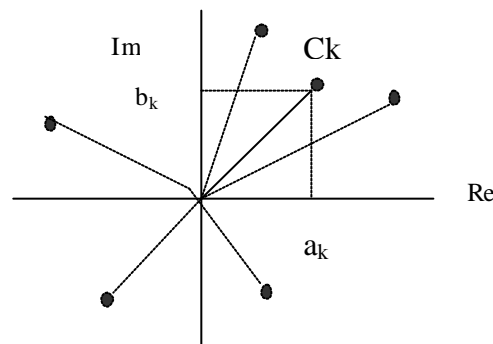


Fig. 27 : Constellation d'une modulation numérique

Le choix du type de modulation revient au choix de la répartition des symboles dans la constellation :

- Il faut que les points soient aussi éloignés que possible les uns des autres afin d'éviter au démodulateur les confusions entre symboles différents et par la suite afin de minimiser les risques d'erreurs à la réception.
- Il faut que l'énergie des signaux élémentaires soit la plus faible possible afin d'économiser la puissance à l'émission. Ceci contraint les points à s'agglomérer autour de l'origine.

C'est le compromis entre ces deux exigences ainsi que l'occupation spectrale du signal modulé et la simplicité de réalisation qui dictent le choix de telle ou telle modulation.

III- Modulation ASK

Il n'y a pas de porteuse en quadrature (modulation mono dimensionnelle) :

$$m(t) = \sum_k a_k \cdot \text{Re } c_T(t-k.T) \cdot \cos(\omega_0 t + \mathbf{j}_0) \quad (106)$$

Modulation binaire (Tout ou Rien : OOK on off keying) :

L'alphabet comporte deux symboles $\{0, a\}$:

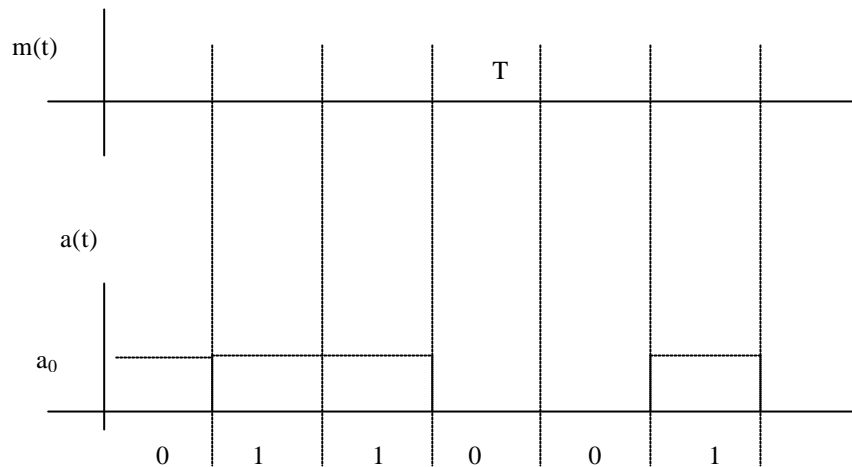


Fig. 28

La constellation comporte deux points sur l'axe en phase :

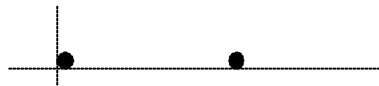


Fig.29 : Modulation OOK

Modulation ASK M symétrique :

On a $M=2^n$ amplitudes possibles a_i à émettre. La modulation symétrique utilise le code de Gray faisant que deux points voisins de la constellation diffèrent d'un seul bit :

$$a_i = (2 \cdot i - M + 1) \cdot a, \quad i=1, \dots, M \quad (107)$$

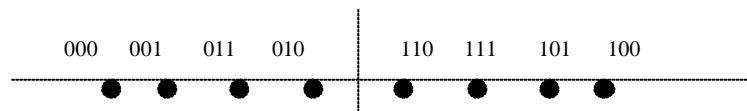


Fig. 30 : Modulation ASK-8

IV- Modulation PSK

Les symboles c_k sont répartis sur un cercle :

$$c_k = e^{j\mathbf{j}_k} \quad (108.1)$$

$$\mathbf{j}_k = \frac{\mathbf{p}}{M} + k \cdot \frac{2\mathbf{p}}{M}, \text{ si } M > 2 \quad (108.2)$$

$$\mathbf{j}_k = 0, \mathbf{p}, \text{ si } M=2 \quad (108.3)$$

Le signal modulé sur l'intervalle $[k.T, (k+1).T]$ s'écrit :

$$m(t) = a \cdot \cos(\mathbf{w}_0 t + \mathbf{j}_0 + \mathbf{j}_k) \quad (109.1)$$

$$m(t) = a \cdot \cos(\mathbf{w}_0 t + \mathbf{j}_0) \cdot \cos(\mathbf{j}_k) - a \cdot \sin(\mathbf{w}_0 t + \mathbf{j}_0) \cdot \sin(\mathbf{j}_k) \quad (109.2)$$

Modulation BPSK (Binary PSK) :

$n=1, M=2 :$

$$m(t) = \pm a \cdot \cos(\omega_0 t + j_0) \quad (110.1)$$

$$j_k = 0, p \quad (110.2)$$

$$c_k = e^{j j_k} \in \{-1, 1\} \quad (110.3)$$

Elle est identique à la modulation ASK 2 symétrique.

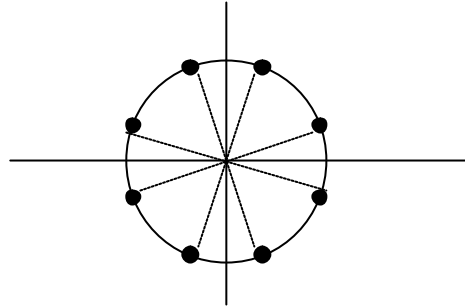


Fig. 31 : Modulation PSK-8

V- Modulation QAM (Quadrature amplitude modulation)

C'est une modulation sur les deux porteuses en quadrature (bidimensionnelle) :

$$m(t) = a(t) \cdot \cos(\omega_0 t + j_0) - b(t) \cdot \sin(\omega_0 t + j_0)$$

Les signaux $a(t)$ et $b(t)$ modulent en amplitudes les deux porteuses en quadrature $\cos()$ et $\sin()$.

Les symboles a_k et b_k prennent leurs valeurs dans deux ensembles à $M=2^n$ états.

Modulation QAM-16 :

Les symboles prennent leurs valeurs dans l'alphabet $\{\pm d, \pm 3d\}$ où d est une constante donnée :

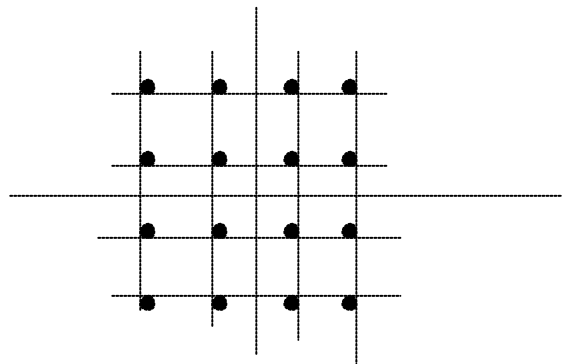


Fig. 32 : Modulation QAM-16

On peut considérer la modulation QAM comme une modulation simultanée de l'amplitude et de la phase.

En effet pendant une période T :

$$m(t) = a_k \cdot \cos(\omega_0 t + j_0) - b_k \cdot \sin(\omega_0 t + j_0) = A_k \cdot \cos(\omega_0 t + j_0 + j_k) \quad (111.1)$$

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \cdot j_k = \arctg\left(\frac{b_k}{a_k}\right) \quad (111.2)$$

Ainsi en maintenant A_k constant c'est une modulation de phase et si on prend les b_k nuls c'est une modulation d'amplitude.

VI- Modulation FSK

Le signal modulé s'écrit :

$$m(t) = \operatorname{Re} \left[\sum_k e^{j \cdot \Phi_k(t)} \cdot e^{j(\omega_0 t + j_0)} \right] \quad (112)$$

Où encore en prenant l'origine des phases de la porteuse à zéro et pour une période T :

$$m(t) = \cos(2\pi f_0 t + \Phi_k(t)) \quad (113)$$

Les symboles à émettre sont injectés dans l'expression de $\Phi_k(t)$. La fréquence instantanée de $m(t)$ est la dérivée de sa phase :

$$f(t) = f_0 + \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\Phi_k(t)}{dt} \quad (114)$$

Où f_0 représente la fréquence centrale et $\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\Phi_k(t)}{dt}$ l'excursion ou déviation de fréquence.

Chaque symbole a_k correspond à une fréquence instantanée caractéristique différente de celles affectées aux autres symboles.

Notons Δf la différence correspondant à l'émission de deux symboles adjacents appartenant à l'alphabet $\{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm (M-1)\}$. L'excursion de fréquence s'écrit alors en fonction des symboles :

$$\frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\Delta f}{2} \cdot \sum_k a_k \cdot \operatorname{Re} c_T(t - kT) \quad (115)$$

Ce qui donne pour l'émission d'un symbole :

$$\Phi_k(t) = \pi \Delta f \cdot a_k \cdot (t - kT) + \Phi_k(kT) \quad (116)$$

Où $\Phi_k(kT)$ est une constante d'intégration. On en déduit la fréquence instantanée du signal modulé :

$$f(t) = f_0 + \frac{\Delta f}{2} \cdot a_k \quad (117.1)$$

$$m_k(t) = \cos \left[2\pi \left(f_0 + \frac{\Delta f}{2} \cdot a_k \right) t \right] \quad (117.2)$$

On peut déjà distinguer la FSK à phase discontinue : Aux instants kT de transition la phase n'est pas continue (sautes) et la FSK à phase continue.

Le choix de l'une ou de l'autre affecte directement le spectre de $m(t)$ (les transitions élargissent le spectre).

VII- Applications

La modulation d'amplitude est simple à réaliser mais assez peu employée pour plus de deux symboles car ses performances deviennent moins bonnes que celles d'autres modulations notamment à cause de sa vulnérabilité au bruit.

On dénombre plusieurs domaines d'application des modulations numériques. Ans être exhaustif, on peut citer :

Les modems téléphoniques :

La transmission d'un haut débit sur le canal téléphonique (de bande passante 3.5 kHz) a nécessité la mise en œuvre de modulations à grand nombre de symboles : QAM-16, QAM-32, QAM-128. On assiste aujourd'hui au développement de modems VFast dont le débit atteint 20Mbits/s sur des liaisons de bonne qualité.

Les faisceaux hertziens

Au début de la numérisation les faisceaux hertziens utilisaient des modulations simples comme la PSK-4, mais l'optimisation de l'usage du spectre radioélectrique disponible a nécessité le développement de faisceaux à grand nombre d'états : QAM-64. C'est la modulation QAM-16 qui a permis la transmission d'un débit de 140Mbits/s dans la bande 6.4-7.1Ghz pour 40Mhz d'espacement inter canal.

En l'an 2000 des faisceaux hertziens offrent un débit de 280Mbits/s en utilisant la QAM-256.

Les transmissions par satellite

Les transmissions par satellite sont caractérisées par une forte atténuation de l'espace et une puissance limitée de l'émetteur à bord. Ceci privilégie l'immunité au bruit au détriment de l'efficacité spectrale des liaisons. Les modulations souvent utilisées sont les PSK-2,4,8.

Le standard en Europe pour la radiodiffusion de la télévision numérique par satellite est basé sur la PSK-4.

Les radiocommunications avec les mobiles

Les systèmes cellulaires américains et japonais utilisent une modulation différente de celle employée en Europe : La p/4-DQPSK qui est une PSK-4 particulière. En Europe c'est la modulation GSM (groupe special mobile) qui est utilisée : C'est une modulation à enveloppe complexe constante appelée GMSK (gaussian minimum shift keying).

Le train de données émis dans une bande de 200kHz est un multiplex de 8 canaux téléphoniques, le débit global est de 270kbits/s environ.

Systèmes cellulaires	Américain	Japonais	Européen
Standard	IS-54/-56	PDC	GSM
Gamme de fréquences	RX :869-894 Tx :824-849	RX :810-826 Tx :940-956	RX :925-960 Tx :880-915
Nombre de canaux	832	1600	124
Nombre d'utilisateurs par canal	3	3	8

Espacement des canaux	30kHz	25kHz	200kHz
Modulation	p/4-DQPSK	p/4-DQPSK	GMSK
Débit binaire	48.6kbits/s	42kbits/s	270kbits/s

La radiodiffusion

En radiodiffusion numérique sonore on utilise la technique COFDM (coded orthogonal frequency division multiplexing) qui offre 16 canaux stéréo occupant une bande de 4Mhz environ.

La TNT (télévision numérique terrestre) est basée sur la COFDM qui nécessite une QAM-64 (grande efficacité spectrale) afin de pouvoir diffuser une chaîne haute définition ou 3 à 4 chaînes standards occupant une bande de 8Mhz.

Ch. VIII : FILTRAGE et DENSITES SPECTRALES

I. DENSITES SPECTRALES

II. FILTRAGE

I. DENSITES SPECTRALES

1. Définition

On définit $g_s(f)$, la densité spectrale d'un signal $s(t)$ comme étant la transformée de Fourier de sa fonction d'autocorrélation $R_s(t)$:

$$g_s(f) = \int_{\mathbb{R}} R_s(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (118)$$

De même que pour les signaux numériques, la densité spectrale est la TFD (Transformée de Fourier Discrète) de la fonction d'autocorrélation.

Remarque : Ceci est en réalité le théorème de Wiener-Khintchine.

▪ Densité spectrale d'énergie

$s(t)$ étant un signal réel à énergie finie :

$$R_s(t) = \int_{\mathbb{R}} s(t)s(t-t) dt \quad (119.1)$$

$$g_s(f) = |S(f)|^2 \quad (120.2)$$

Exemple :

$$s(t) = \text{Rec}(t/T) \quad (121.1)$$

$$S(f) = T \cdot \text{sinc}(Tf) \quad (121.2)$$

$$g_s(f) = T^2 \text{sinc}^2(Tf) \quad (121.3)$$

Où

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \quad (122)$$

Désigne le *sinus cardinal* de x .

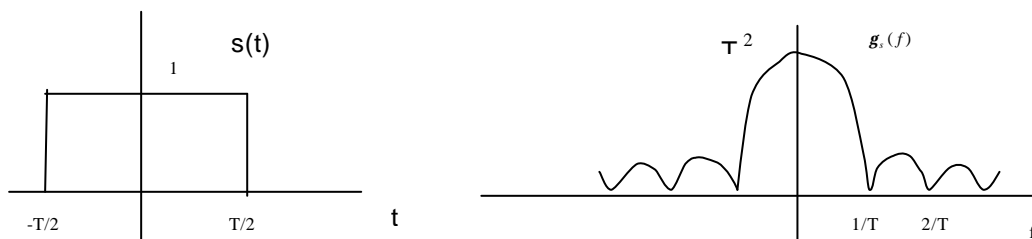


Fig.33

▪ Densité spectrale de puissance (DSP)

En divisant la densité spectrale d'énergie (120.2) par la durée du signal, on en tire la densité spectrale de puissance *moyenne*.

1. Signaux périodiques :

$$R_s(t) = \frac{1}{T} \int_T s(t)s(t-t) dt \quad (123.1)$$

$$g_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 d(f - n/T) \quad (123.2)$$

Exemple :

$$s(t) = A \cdot \sin(2\pi f_0 t + j) \quad (124.1)$$

$$s(t) = \frac{A}{2j} e^{j} e^{j2\pi f_0 t} - \frac{A}{2j} e^{-j} e^{-j2\pi f_0 t} \quad (124.2)$$

$$C_1 = -C_{-1} = \frac{A}{2j} e^{j} \quad (124.3)$$

$$g_s(f) = \frac{A^2}{4} d(f - f_0) + \frac{A^2}{4} d(f + f_0) \quad (124.4)$$

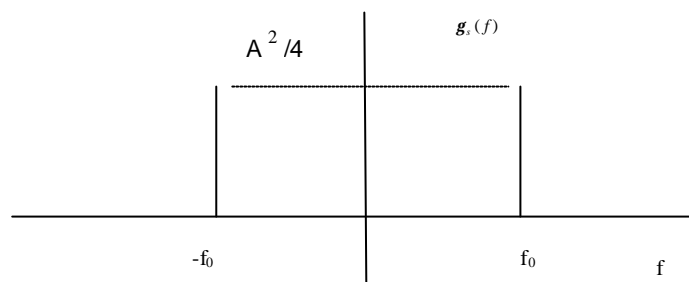


Fig.34

Remarques

- ✓ On peut déduire la fonction d'autocorrélation en prenant la TF inverse de $g_s(f)$: $R_s(t) = \frac{A^2}{2} \cdot \cos(2\pi f_0 t)$.
- ✓ La puissance moyenne totale $\frac{A^2}{2}$ est répartie également en deux raies de poids $\frac{A^2}{4}$ aux fréquences f_0 et $-f_0$.

2. Signaux non périodiques à puissance moyenne finie :

$$R_s(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) s(t-t) dt \quad (125.1)$$

$$g_s(f) = TFR(R_s(t)) \quad (125.2)$$

3. Signaux aléatoires :

$$R_s(t) = E[s(t)s(t-t)] \quad (126.1)$$

$$g_s(f) = TFR(R_s(t)) \quad (126.2)$$

Exemple :

Un bruit blanc $b(t)$ possède une fonction d'autocorrélation :

$$R_b(t) = s^2 d(t) \quad (127.1)$$

Indiquant que tous les échantillons de $b(t)$ sont décorrélés. Dans ce cas :

$$g_b(f) = s^2 \quad (127.2)$$

Ce qui signifie que le bruit est *présent*, avec la même puissance moyenne, pour toutes les fréquences utilisées.

2. Propriétés

- La densité spectrale est une fonction réelle positive et paire dans le cas des signaux réels.
- $R_s(0)$ représente la puissance moyenne ou l'énergie totales du signal.
- Si la densité renferme une impulsion de Dirac à la fréquence zéro, cela décèle une composante continue dans le signal $s(t)$.
- La puissance ou l'énergie du signal confinée dans la bande $[f_0 - \Delta f, f_0 + \Delta f]$ est :

$$\Delta g = \int_{f_0 - \Delta f}^{f_0 + \Delta f} g_s(f) df \quad (128)$$

Si Δf est assez faible : $\Delta g \approx g_s(f_0) \Delta f$, ce qui justifie l'appellation *densité*.

Notons enfin que la densité spectrale est homogène à une énergie.

II. FILTRAGE LINEAIRE

1. Définitions

On recourt au filtrage d'un signal soit pour :

- ✓ Éliminer ou atténuer une partie de son spectre

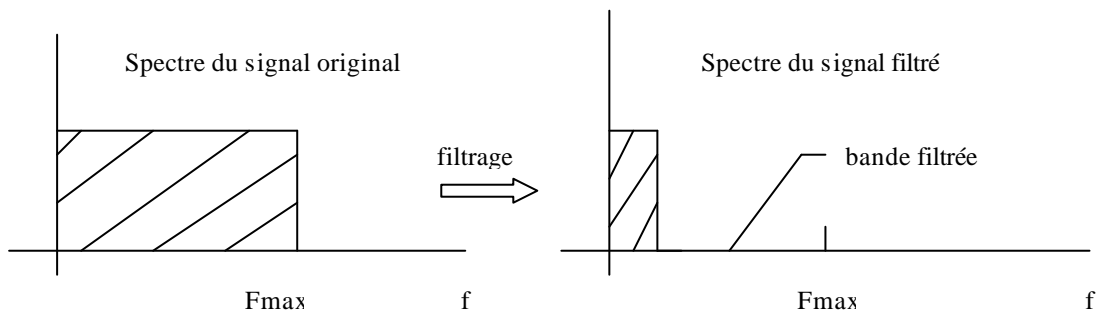


Fig.35

- ✓ Le débarrasser d'un bruit

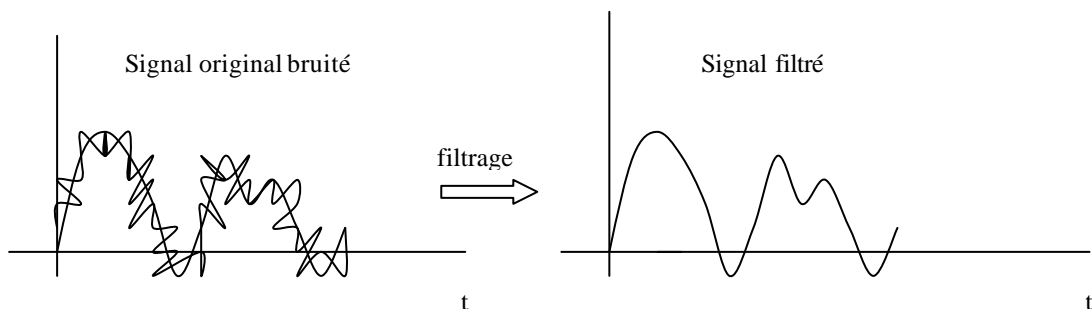


Fig.36

Réponse impulsionnelle d'un filtre

Un filtre linéaire invariant est caractérisé par une réponse impulsionnelle (RI) notée $h(t)$, qui représente la sortie du filtre lorsque l'entrée ou l'excitation est une impulsion de Dirac.

La TF de $h(t)$ est la réponse fréquentielle (RF) $H(f)$ du filtre, dont le module est le *spectre d'amplitude* et l'argument le *spectre de phase*.

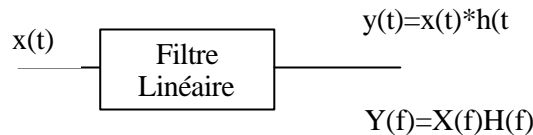


Fig.37

On démontre que la sortie $y(t)$ du filtre est la convolution de l'entrée $x(t)$ avec la réponse impulsionnelle $h(t)$:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)x(t-u)du \quad (129.1)$$

Qui s'écrit en pratique (x et h sont causals c.a.d nuls pour les instants négatifs) :

$$y(t) = \int_0^t h(u)x(t-u)du \quad (129.2)$$

Interprétation :

La sortie $y(t)$ du filtre à l'instant t est la somme de toutes les entrées $x(t-u)$ aux instants précédents t , pondérées par les coefficients $h(u)$ (sorte de mémoire du filtre). Cette relation se traduit au niveau des fréquences par un produit simple des transformées : $Y(f) = H(f).X(f)$.

Dans le cas d'un signal aléatoire :

$$g_y(f) = g_x(f)|H(f)|^2 \quad (130)$$

Exemple : Cellule RC

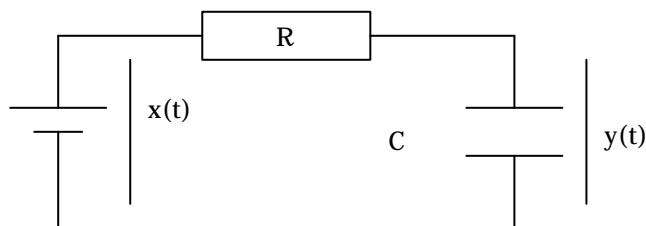


Fig.38

Ce filtre analogique est régi par l'équation différentielle de premier ordre à coefficients constants :

$$R.C.y'(t) + y(t) = x(t) \quad (131)$$

Si on prend la transformée de Fourier, on obtient :

$$RC.(j2\pi f).Y(f)+Y(f) = X(f) \quad (132.1)$$

$$H(f)=\frac{1}{1+j\frac{f}{f_0}} \quad (132.2)$$

En posant : $f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$, $t = RC$.

La transformée de Fourier inverse donne la réponse impulsionnelle de la cellule :

$$h(t) = \frac{1}{t} e^{-\frac{t}{t}} .u(t) \quad (133)$$

Où l'échelon unité est défini par : $u(t)=0$ si $t < 0$ et 1 sinon.

Réponse indicielle

Si l'excitation est un échelon, la réponse (dite indicielle) peut être calculée directement :

$$h_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(v)u(t-v)dv = (1 - e^{-\frac{t}{t}}).u(t) \quad (134)$$

1. Stabilité et causalité d'un filtre

On définit la stabilité d'un filtre par la propriété suivante :

Un filtre est stable si la sortie $y(t)$ est bornée lorsque l'entrée $x(t)$ est bornée :

$$\exists M > 0 \quad ||y|| = M. ||x|| \quad (135)$$

Les normes des signaux x et y dépendent des espaces normés des signaux de travail.

On appelle pôle de $H(p)$, transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle $h(t)$, tout nombre complexe z tel que $\lim_{p \rightarrow z} H(p) = \infty$ quand p tend vers z .

Théorème

Un filtre est stable si et seulement si tous les pôles de sa fonction de transfert $H(p)$ ont une partie réelle négative (sont à gauche de l'axe imaginaire).

Exemple Cellule RC

Si on prend la transformée de Laplace de l'équation différentielle, on obtient :

$$RC [p.Y(p)-y(0)]+Y(p)=X(p) \quad (136.1)$$

$$H(p)=\frac{1}{1+t.p} \quad (136.2)$$

En prenant $y(0)=0$.

$H(p)$ possède un seul pôle $z = -\frac{1}{t}$ réel strictement négatif : Le filtre RC est stable.

Causalité

On définit la causalité d'un filtre par la propriété suivante :

Un filtre est causal si pour toute entrée $x(t)$ nulle pour $t < 0$, la sortie $y(t)$ est nulle pour $t < 0$. On dira aussi dans ce cas que le filtre est réalisable.

Théorème

Un filtre est causal si et seulement si sa réponse impulsionnelle est nulle aux instants négatifs.

Exemple Cellule RC

Le filtre RC est causal puisqu'on a vu que $h(t) = 0$ pour tout $t < 0$.

3. Distorsions linéaires

Lorsque l'entrée d'un filtre est une sinusoïde d'amplitude A de fréquence f_0 et de phase j , alors la transformée de la sortie s'écrit :

$$Y(f) = H(f) \cdot \left[\frac{A}{2j} e^{ij} \delta(f - f_0) - \frac{A}{2j} e^{-ij} \delta(f + f_0) \right] \quad (137)$$

En vertu des propriétés de la distribution de Dirac :

$$Y(f) = \frac{A}{2j} e^{ij} H(f_0) \delta(f - f_0) - \frac{A}{2j} e^{-ij} H(-f_0) \delta(f + f_0) \quad (138)$$

$h(t)$ étant supposée réelle : $H(-f) = H^*(f)$, et si on pose $\text{Arg}H(f_0) = \phi(f_0) = \phi_0$, $Y(f)$ s'écrit :

$$Y(f) = \frac{A}{2j} |H(f_0)| \left[e^{j(j+\phi_0)} \delta(f - f_0) - e^{-j(j+\phi_0)} \delta(f + f_0) \right] \quad (139)$$

Ceci signifie que la sortie $y(t)$ est une sinusoïde d'amplitude $A|H(f_0)|$ et de phase $j + \phi_0$ qui dépendent tous les deux de la fréquence f_0 .

Pour un signal d'excitation $s(t)$ quelconque, de spectre $S(f)$, chaque composante fréquentielle f induira en sortie une amplitude et une phase dépendant de f .

Ceci implique une distorsion d'amplitude causant un *retard ou temps de propagation de groupe* (group delay) t_g et une distorsion de phase causant un *retard ou temps de propagation de phase* (phase delay) t_j .

Exercice

En développant $Y(f)$ au voisinage de f_0 :

- Montrer que :

$$t_g = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\phi}{df}(f_0) \quad (140.1)$$

$$t_j = -\frac{1}{2\pi} \frac{\phi(f_0)}{f_0} \quad (140.2)$$

- Montrer que ces deux retards ne sont égaux que si la réponse de phase du filtre est linéaire en f .

On démontre que l'enveloppe du signal filtré (*courbe tangente aux extremums du signal*) subit un retard t_g alors que la composante auxiliaire sinusoïdale subit elle le retard t_j (voir Fig.)

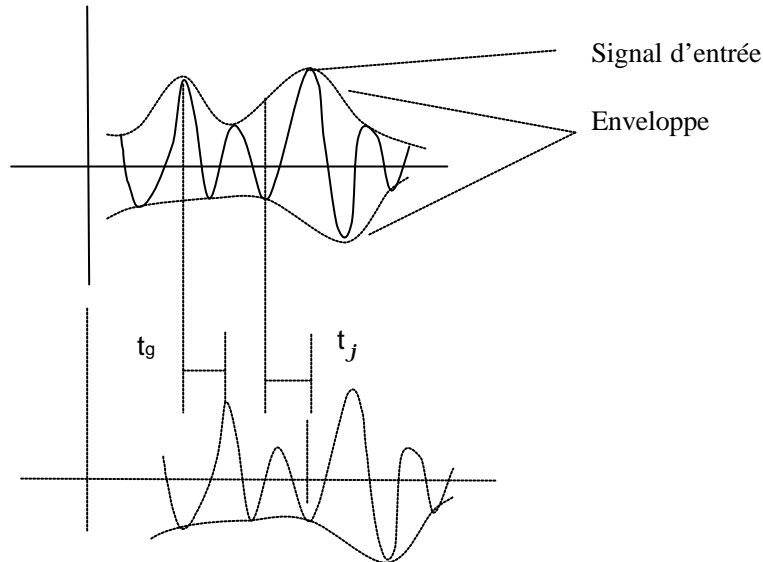


Fig.39

4. Systèmes à phase linéaire

Ce sont des systèmes pour lesquels le spectre de phase est proportionnel à la fréquence f :

$$\phi(f) = a.f \quad (141)$$

Exemple : Retardateur

$$y(t) = x(t - t) \quad (142)$$

L'effet du filtre consiste à retarder l'entrée de t secondes.

La réponse fréquentielle est :

$$H(f) = Y(f)/X(f) = e^{-j2\pi f t} \quad (143)$$

Dont le module est égal à un et l'argument $\phi(f) = -j2\pi f t$ proportionnel à la fréquence.

Dans ce cas $t_j = t_g$.

Ch. IX : DETECTION et ESTIMATION

I-	Introduction
II-	Rapport signal sur bruit
III-	Filtre optimal
IV-	Filtre adapté
V-	Filtre de Wiener
VI-	Détection par inter corrélation
VII-	Estimation de la densité spectrale

I- Introduction

L'observation

Les signaux qui intéressent l'observateur ont été généralement acheminés dans des milieux plus ou moins agressifs : distorsions et bruits de mises en forme, perturbations dues aux milieux de transmissions... ce qui impose avant toute exploitation du signal brut un traitement approprié. On parlera de détection lorsqu'on connaît le signal déterministe utile ou d'origine avant son émission et d'estimation dans le cas d'un signal aléatoire ou déterministe sur lequel on a peu d'information a priori.

Le modèle

La première étape, une fois le signal observé, est la modélisation. Elle consiste à traduire mathématiquement le lien entre le signal utile et les perturbations ou distorsions (*addition* de bruit, *convolution* avec une fonction...)

Le critère

Le choix d'un critère d'estimation (détection) s'impose dès ensuite : Des critères différents donnent des résultats différents en général. Ainsi peut-on chercher à partir du signal observé et suivant le modèle adopté, à minimiser une certaine quantité (distance, erreur, rapport...) qu'on qualifie de fonction *coût* ou *risque*. La solution trouvée est alors optimale selon le critère choisi (maximum de vraisemblance, quadratique, moindre carrés...).

La mise en œuvre

Cette étape consiste à mettre en pratique la solution : L'algorithme puis réalisation informatique ou matérielle (DSP). Elle est généralement précédée par une étape de simulation (imitation des conditions naturelles de l'observation) qui est cruciale pour la qualité des résultats.

L'évaluation

C'est une tâche comparative qui consiste, d'une part, à essayer plusieurs paramètres du modèle et d'autre part à essayer plusieurs critères. C'est cette étape seule qui permettra de juger **la qualité** de l'opération toute entière.

Qualité d'une estimation

On mesure généralement la qualité d'un estimateur par son écart par rapport à la valeur souhaitée : On adopte le biais d'une part qui est la moyenne de l'écart et la variance d'autre part qui est la puissance de l'écart (mesure les fluctuations de l'estimateur autour de la valeur souhaitée).

Notons **a** un paramètre à estimer et **â** la valeur estimée.

Le biais de l'estimateur :

$$b = E[\hat{a} - a] \quad (144.1)$$

Dans le cas où a est un paramètre déterministe, le biais devient tout simplement *une erreur d'estimation* :

$$|\hat{a} - a| \quad (144.2)$$

La variance de l'estimateur :

$$s^2 = E[(\hat{a} - a)^2] \quad (145)$$

Dans le cas déterministe cette variance devient une moyenne quadratique de l'erreur d'estimation ou une distance au carrée entre l'estimation et la valeur réelle.

Commentaires :

- En absence d'information a priori sur le paramètre à estimer, on peut modéliser l'erreur d'estimation $e = \hat{a} - a$ par une variable aléatoire gaussienne de moyenne b et de variance s^2 .
- Un biais nul ne signifie pas automatiquement que l'estimateur est bon ; On lui préfère dans des cas un estimateur de biais non nul mais de variance plus faible.

II. Rapport signal sur bruit (SNR)

Considérons un filtre linéaire de RI $h(t)$. L'entrée $e(t)$ est une combinaison d'un signal utile $x(t)$ et d'un bruit aléatoire $b(t)$. On définit le SNR par un rapport de puissances :

$$r = \frac{P_{\text{utile}}}{P_{\text{bruit}}} \quad (146.1)$$

Ce rapport s'exprime pratiquement en dB :

$$R = 10 \cdot \log_{10}(r) \quad (146.2)$$

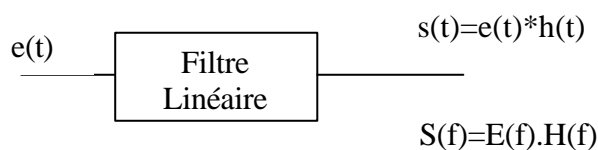


Fig.40

Le rapport instantané

Le SNR à l'entrée du filtre à un instant t s'écrit :

$$r_e(t) = \frac{x(t)^2}{b(t)^2} \quad (147.1)$$

Dans le cas de signaux aléatoires il faut convenir que ce rapport n'est pas de grande utilité, puisqu'il est aléatoire lui-même. On pourrait adopter une définition plus intéressante dans ce cas :

$$r_e(t) = \frac{E[x(t)^2]}{E[b(t)^2]} \quad (147.2)$$

Le rapport moyen

Dans l'hypothèse de signaux stationnaires au second ordre et en prenant les moyennes statistiques ou temporelles des signaux, ce rapport ne dépendra plus de t . En notant g la densité spectrale de puissance (transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation), les SNR moyens à l'entrée et à la sortie du filtre sont respectivement :

$$\begin{aligned} r_e &= \frac{\int_{\mathfrak{R}} g_x(f) \cdot df}{\int_{\mathfrak{R}} g_b(f) \cdot df} \\ r_s &= \frac{\int_{\mathfrak{R}} g_x(f) \cdot |H(f)|^2 df}{\int_{\mathfrak{R}} g_b(f) \cdot |H(f)|^2 df} \end{aligned} \quad (148)$$

Problème :

Le signal $x(t)$ étant faible par rapport au bruit $b(t)$ (r_e faible), on opère un filtrage de $e(t)$ qui pourra améliorer le SNR : $r_s \succ r_e$.

Le problème est alors de trouver $H(f)$ qui rend le SNR maximal à la sortie, ou tout au moins l'améliorer.

Exemple : Filtrage d'une sinusoïde noyée dans un bruit.

Le signal utile est une sinusoïde $x(t) = A \cdot \sin(2\pi f_0 t)$ dont la puissance moyenne est $P_x = \frac{A^2}{2}$. On suppose que le bruit d'écart type s_b est *blanc, additif et indépendant* de $x(t)$; La puissance du signal $e(t)$ est tout simplement la somme de celles de $x(t)$ et de $b(t)$.

$$P_e = P_x + P_b = \frac{A^2}{2} + s_b^2 \quad (149)$$

Le SNR à l'entrée s'écrit alors :

$$r_e = \frac{A^2}{2s_b^2} \quad (150)$$

Effectuons un filtrage passe-bas à l'aide d'une cellule R-C de fonction de transfert :

$$H(f) = \frac{1}{1 + j \frac{f}{f_c}} \quad (151)$$

Où $f_c = \frac{1}{2\pi RC}$ désigne la fréquence de coupure de la cellule RC.

A la sortie de ce filtre la sinusoïde admet une puissance $P_s = \frac{A^2}{2} |H(f_0)|^2$ et le bruit une

puissance $P_{bs} = s_b^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + (\frac{f}{f_c})^2} df = \pi f_c s_b^2$. Le SNR à la sortie devient alors :

$$r_s = \frac{A^2}{2S_b^2} \cdot \frac{|H(f_0)|^2}{pf_c} = r_e \cdot \frac{f_c}{p(f_c^2 + f_0^2)} \quad (152)$$

L'amélioration du SNR revient alors à maximiser la quantité $\frac{f_c}{f_c^2 + f_0^2}$ par rapport à f_c , paramètre du filtre recherché. On démontre aisément que ce rapport est maximal pour $f_c = f_0$ auquel cas le SNR est amélioré d'un facteur de $\frac{1}{2pf_0}$.

Remarques :

- Le choix du filtre qui rend le SNR moyen maximal suppose connue la fréquence de la sinusoïde. Cependant aucune information n'est requise concernant la puissance du bruit.
- Le filtre ainsi trouvé ne garantit pas un SNR maximal à tout instant t mais juste une moyenne maximale.
- La fréquence de la sinusoïde doit être inférieure à $\frac{1}{2p}$ pour que le facteur d'amélioration soit supérieur à un, sinon il ne peut que se dégrader.
- L'amplitude de la sinusoïde est atténuée de -3dB, mais devient plus nette puisque le bruit aussi a été atténué encore plus.

III- Filtrage optimal

Considérons un signal déterministe $x(t)$ bruité et cherchons un filtre $H(f)$ qui maximise le SNR à un instant précis T . A la sortie du filtre et à l'instant précisé le SNR s'écrit :

$$r_s(T_0) = \frac{\left| \int_{\Re} X(f) \cdot H(f) \cdot e^{j2\pi f T_0} df \right|^2}{\int_{\Re} g_b(f) |H(f)|^2 df} \quad (153)$$

Pour trouver H qui maximise ce rapport on fait appel à l'inégalité de cauchy-schwartz :

$$\left| \int u(t) \cdot \bar{v}(t) dt \right|^2 \leq \int |u(t)|^2 dt \int |v(t)|^2 dt \quad (154)$$

L'égalité a lieu si et seulement si $u(t) = k \cdot v(t)$ où k est une constante. Alors, en posant :

$$u(f) \cdot \bar{v}(f) = X(f) \cdot H(f) e^{j2\pi f T_0} \quad (155.1)$$

$$|u(f)|^2 = g_b(f) |H(f)|^2 \quad (155.2)$$

Soit :

$$u(f) = H(f) \cdot \sqrt{g_b(f)} \cdot e^{j\pi f} \quad (156.1)$$

$$v(f) = \frac{\bar{X}(f) \cdot e^{-j2\pi f T_0}}{\sqrt{g_b(f)} e^{-j\pi f}} \quad (156.2)$$

On obtient :

$$r_s(T_0) = \frac{\left| \int u \cdot \bar{v} \right|^2}{\int |u|^2} \leq \int |v|^2 \quad (157)$$

Le maximum du SNR a lieu pour le filtre $H(f)$ dit **optimal** :

$$H_{optimal}(f) = K \cdot \frac{\overline{X}(f) \cdot e^{-j2\pi f T_0}}{g_b(f)} \quad (158)$$

Où K est une constante arbitraire.
La valeur du SNR est dans ce cas :

$$r_{s \max}(T_0) = \int \frac{|X(f)|^2}{g_b(f)} df \quad (159)$$

On remarque que ce maximum est indépendant de T_0 . L'instant T_0 de lecture de la sortie du filtre intervient dans l'expression du filtre optimal justement comme un retard qui affecte le signal d'entrée afin que le SNR atteigne son maximum.

IV- Filtrage adapté

Si le bruit est *blanc* on parle de **filtre adapté** (sous entendre au signal $x(t)$) :

$$H_{adapté}(f) = K \cdot \overline{X}(f) \cdot e^{-j2\pi f T_0} \quad (160)$$

$$r_{s \max}(T_0) = \frac{E_x}{S_b^2}$$

Où E_x désigne l'énergie du signal $x(t)$.

La réponse impulsionnelle du filtre adapté est la transformée inverse :

$$h_{adapté}(t) = K \cdot x(t_0 - t) \quad (161)$$

Qui représente le signal utile $x(t)$ renversé et translaté de t_0 . Cette réponse n'est pas causale ce qui rend le filtre adapté non réalisable en temps réel.

Cependant ce filtre peut-être appliqué à un enregistrement (attendre l'écoulement de la durée totale du signal et prendre pour T_0 l'instant du maximum) , à une image figée et plus généralement aux cas où la causalité n'est pas requise.

Application : Détection d'une impulsion

Considérons un système émettant une impulsion $x(t)$ rectangulaire de durée T_0 et d'amplitude A . $\text{Rec}(t)$ étant la fonction porte égale à un pour t entre $-1/2$ et $1/2$ et nulle ailleurs :

$$x(t) = A \cdot \text{Rec}\left(\frac{t - T_0/2}{T_0}\right) \quad (162)$$

Le filtre adapté a l'instant T_0 a pour RI $h(t) = \text{Rec}\left(\frac{t - T_0/2}{T_0}\right)$, du fait que Rec est une

fonction paire. Le SNR maximal s'écrit : $r_{s \max} = \frac{T_0 A^2}{S_b^2}$. Le récepteur prélève après

filtrage la valeur du signal de sortie à l'instant T_0 .

Exercice : Vérifier justement qu'à cet instant le produit de convolution de $x(t)$ et $h(t)$ est maximal ; Utiliser la TF.

V- Filtre linéaire de Wiener

Considérons le modèle d'observation suivant :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} + \mathbf{B} \quad (163)$$

\mathbf{Y} , \mathbf{X} et \mathbf{B} sont respectivement les signaux aléatoires observé, utile et le bruit. On suppose ces trois signaux centrés.

L'estimé est $\hat{X} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Y}$, linéaire en \mathbf{Y} , qui minimise l'erreur quadratique moyenne (EQM) : $e = E[(\hat{X} - X)^2]$. Explicitons cette erreur :

$$\begin{aligned} e(\hat{X}) &= E[A^2 Y^2] + E[X^2] - 2E[A \cdot Y \cdot X] \\ e(\hat{X}) &= A^2 \mathbf{s}_y^2 + \mathbf{s}_x^2 - 2AE[Y \cdot X] \end{aligned} \quad (164)$$

On prend la dérivée par rapport à \mathbf{A} (qui est déterministe) :

$$\frac{\partial e}{\partial A} = 2\mathbf{s}_y^2 \cdot A - 2 \cdot E[Y \cdot X]$$

Alors l'estimé s'écrit :

$$\hat{X}_{EQM} = \frac{R_{XY}}{R_Y} \cdot Y \quad (165)$$

où R_{xy} et R_y désignent respectivement l'intercorrélacion de X et Y et l'autocorrélacion de Y .

D'autre part :

$$E[X \cdot Y] = E[X^2] + E[X \cdot B] = E[Y^2] - E[B^2] + E[X \cdot B]$$

Finalement l'estimé devient :

$$\hat{X}_{EQM} = \left(1 - \frac{\mathbf{s}_b^2}{\mathbf{s}_y^2} + \frac{R_{XB}}{\mathbf{s}_y^2}\right) \cdot Y \quad (166)$$

Et l'erreur minimale :

$$e_{\min} = \left(1 - \frac{\mathbf{s}_b^2}{\mathbf{s}_y^2}\right) \cdot \mathbf{s}_b^2 + f(R_{XB}) \quad (167)$$

le dernier terme est proportionnel à R_{b} qui est souvent nul (bruit non corrélé aux données).

Dans le cas plus général ou le signal \mathbf{X} n'est pas centré et le bruit centré et non corrélé au signal, l'estimé et l'erreur minimale deviennent :

$$\begin{aligned} \hat{X}_{EQM} &= r \cdot E[Y] + (1 - r) \cdot Y \\ e_{\min} &= (1 - r) \cdot \mathbf{s}_b^2 \\ r &= \frac{\mathbf{s}_b^2}{\mathbf{s}_y^2} \end{aligned} \quad (168)$$

Commentaires :

- L'estimateur EQM est un compromis entre la moyenne de l'observation et l'observation elle même; Le facteur régulateur est l'inverse du SNR à l'entrée. Quand le bruit est comparable aux fluctuations du signal autour de sa moyenne on effectue un moyennage ; si par contre le bruit est très faible on se contente de l'observation.

- Tant que le bruit est faible devant le signal, l'EQM est inférieure à la puissance du bruit, ce qui justifie le filtrage.
- L'estimateur EQM n'est pas biaisé : $E[\hat{X}_{EQM}] = E[Y] = E[X]$.
- La mise en œuvre de l'algorithme de filtrage nécessite la connaissance a priori de la variance du bruit, celle de l'observation devant être estimée (voir paragraphe suivant) au fur et à mesure de l'évolution de l'entrée.

Exercices :

1- Chercher l'estimateur EQM d'une sinusoïde noyée dans le bruit ; distinguer deux cas : amplitude aléatoire puis phase aléatoire.

2- Comparer les SNR à l'entrée et à la sortie du filtre EQM, c'est-à-dire $r_e = \frac{E[X^2]}{s_b^2}$ et

$$r_s = \frac{E[\hat{X}^2]}{e}.$$

Filtrage linéaire d'un processus (généralisation)

Considérons un processus $\mathbf{X}=(X_0...X_{N-1})$ utile recherché et un échantillon $Y_0 ... Y_{N-1}$ observé. Le résultat d'une expérience fournit les valeurs $y_0 ... y_{N-1}$ correspondants aux données $x_0 ... x_{N-1}$.

On cherche l'estimateur (filtre linéaire) d'ordre N :

$$\hat{X} = \sum_{j=1}^N \mathbf{a}_j \cdot Y_{N-j} \quad (169)$$

Qui minimise la distance au carré (critère de Gauss ou moindre carrées) :

$$\|\hat{X} - X\|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (\hat{x}_k - x_k)^2 \quad (170)$$

En injectant l'expression de l'estimateur dans le critère et en exprimant la solution sous forme matricielle on est amené à résoudre l'équation de Wiener-Hopf.

En posant $\mathbf{Y}=[Y_0 ... Y_{N-1}]^t$ le vecteur échantillon observé, $\mathbf{a}=[a_1 ... a_N]^t$, $\mathbf{R}_{XY}=E[\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}]$ le vecteur intercorrélations de \mathbf{X} et \mathbf{Y} et $\mathbf{R}_{YY}=E[\mathbf{Y} \cdot \mathbf{Y}^t]$ la matrice d'autocorrélations de \mathbf{Y} , on établit que :

$$\mathbf{a} = \mathbf{R}_{YY}^{-1} \cdot \mathbf{R}_{XY} \quad (171)$$

Soit :

$$\begin{bmatrix} R_{YY}(0) & .. & .. & .. & R_{YY}(N-1) \\ : & : & : & : & : \\ : & : & : & : & : \\ : & : & : & : & : \\ R_{YY}(N-1) & .. & .. & .. & R_{YY}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ : \\ : \\ : \\ \mathbf{a}_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{XY}(0) \\ : \\ : \\ : \\ R_{XY}(N-1) \end{bmatrix} \quad (172)$$

La mise en œuvre de ce filtre nécessite une estimation ou une modélisation des fonctions d'auto et d'inter corrélations qui se présentent déjà d'une manière approximative dans l'expression du filtre. De plus le filtre suppose la stationnarité des signaux et ne peut pas fonctionner en temps réel (voir filtrage adaptatif *récuratif*).

Remarquons qu'on peut choisir un ordre p du filtre qui soit inférieur au nombre N des observations.

Prédiction linéaire

Pour prédire la valeur future d'un processus \mathbf{Y} , on pose $\mathbf{X}_k = \mathbf{Y}_{k+1}$ et on applique l'algorithme précédent.

VI- Estimation par intercorrélacion

1. Détection d'une sinusoïde à phase aléatoire

On considère une sinusoïde à phase aléatoire $s(t) = A \cdot \sin(\omega t + j)$, noyée dans le bruit blanc additif $b(t)$ indépendant de la phase : $y(t) = s(t) + b(t)$.

On dispose d'un signal $\varpi(t) = 2 \cdot \cos(\omega t)$ fourni par un générateur auxiliaire qui va nous permettre de détecter la présence de $s(t)$ dans le bruit par intercorrélacion temporelle sur une durée T multiple de la période de $s(t)$:

$$R_{ys_0}(t) = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) s_0(t-t) dt \quad (173)$$

En développant l'intégrale, R_{ys_0} devient :

$$R_{ys_0}(t) = \frac{2A}{T} \int_0^T \sin(\omega t + j) \cos(\omega t - \omega t) dt + \frac{2}{T} \int_0^T b(t) s_0(t-t) dt$$

Soit :

$$R_{ys_0}(t) = s(t) + z(T, t) \quad (174.1)$$

Avec :

$$z(T, t) = \frac{1}{T} \int_0^T b(t) s_0(t-t) dt \quad (174.2)$$

Où z est un signal aléatoire d'erreur, *sans biais* et dont la *variance* tend vers zéro quand T tend vers l'infini. En effet :

$$\begin{aligned} E[z(T, t)] &= \frac{1}{T} \int_0^T E[b(t)] \cdot s_0(t-t) dt = 0 \\ E[z^2(T, t)] &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T E[b(u) \cdot b(v)] \cdot s_0(u-t) \cdot s_0(v-t) du dv \\ &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T s_b^2 \cdot \delta(u-v) \cdot s_0(u-t) \cdot s_0(v-t) du dv \\ &= \frac{s_b^2}{T^2} \int_0^T s_0^2(v-t) dv \end{aligned}$$

Cette dernière intégrale est majorée par T donc la variance par $\frac{s_b^2}{T}$. Finalement R_{ys_0} est une bonne estimation de la sinusoïde s .

2. Détection d'une composante continue

On se propose d'estimer la valeur d'une constante C noyée dans un bruit blanc additif $b(t)$ de variance s_b^2 .

Le signal observé étant $y(t)=C+b(t)$, l'estimateur qu'on utilise est la moyenne temporelle sur une tranche de durée T :

$$\hat{C} = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt \quad (175)$$

On montre exactement comme dans le cas précédent qu'on peut écrire :

$$\hat{C} = C + z(T) \quad (176)$$

$z(T)$ étant un signal d'erreur de moyenne nulle (*non biaisé*) et dont la variance tend vers zéro lorsque T tend vers l'infini.

VII- Estimation de la densité spectrale

Rappelons que la dsp $g(f)$ d'un signal est la transformée de Fourier de sa fonction d'autocorrélation, qui coïncide avec le module au carré de la TF du signal dans le cas déterministe.

On peut distinguer trois méthodes classiques d'estimation du spectre $g(f)$ d'un signal $s(t)$:

- On applique à $s(t)$ un filtrage sélectif autour de la fréquence f_0 ensuite on élève au carré le résultat et on intègre ce qui donne une quantité proportionnelle à $g(f_0)$.
- *Méthode du corrélogramme* : On estime la fonction d'autocorrélation puis on effectue la transformation de Fourier.
- *Méthode du périodogramme* : On effectue la TF sur des tranches du signal, de même durée T , puis on effectue la moyenne.

La première méthode se prête aux signaux analogiques. Les deux dernières s'appliquent plus ou moins efficacement aux signaux numériques.

D'autres méthodes modernes d'estimation s'imposent : Modélisations ARMA, entropie...

1. Méthode du périodogramme

Considérons $s_i(t, T)$ une réalisation du signal *aléatoire* $s(t)$ dans le domaine $[-T/2, T/2]$. Etant à énergie finie, sa puissance moyenne s'écrit :

$$P_T = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |s_i(t, T)|^2 dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} |S_i(f, T)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} g_i(f, T) df \quad (177)$$

Où $g_i(f, T)$, une fonction aléatoire, désigne la dsp du signal restreint et appelé *périodogramme* :

$$g_i(f, T) = \frac{|S_i(f, T)|^2}{T} \quad (178)$$

L'espérance mathématique de $g_i(f, T)$ définit la dsp moyenne des réalisations de $s(t)$ sur l'intervalle $[-T/2, T/2]$. En prenant la limite de cette moyenne on dispose de la définition de la dsp du signal $s(t)$:

$$g(f) = \lim_{T \rightarrow +\infty} E \left[\frac{|S_i(f, T)|^2}{T} \right] \quad (179)$$

2. Théorème de Wiener-Khinchine

On démontre à partir de la définition précédente de la dsp que :

La densité spectrale de puissance d'un signal aléatoire stationnaire au sens large ou déterministe est la transformée de Fourier de sa fonction d'autocorrélation.

3. Estimation de la dsp

Estimation à partir d'une seule tranche T du signal s(t)

On est tenté par $g_i(f, T)$ en tant qu'estimateur de la dsp. Il se trouve qu'il est biaisé et de variance importante. En faisant tendre T vers l'infinie le biais tend vers zéro mais la variance reste importante et tend même vers le carré de la dsp (ce qu'on cherche à estimer !).

Estimation par moyennage sur plusieurs tranches

On choisit N tranches du signal s(t) disjointes et de même durée T très supérieure au temps de corrélation de s(t) ($R_s(T)$ presque nulle : les tranches peuvent alors être considérées comme statistiquement indépendantes). On estime la dsp de s(t) par la moyenne arithmétique des dsp des N tranches :

$$\hat{g}(f, T) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N g_i(f, T) \quad (180)$$

L'écart type est ainsi divisé par \sqrt{N} .

On peut améliorer l'estimation en pondérant les tranches du signal par une fenêtre atténuant les effets de bords (frontières des tranches).

Ch. X: TRANSFORMATION EN Z

I- INTRODUCTION	
II- DEFINITION	
III- TRANSFORMEE en Z INVERSE	
IV- PROPRIETES	
V- FONCTION de TRANSFERT	

I- INTRODUCTION

La transformée en Z (TZ) est un outil puissant de modélisation et calcul des signaux et systèmes numériques. Elle est orientée essentiellement vers l'analyse et la synthèse des systèmes. La transformée de Fourier est une restriction au cercle unité de la TZ.

La TF sert plutôt l'analyse et la représentation des signaux; les polynômes en $e^{j2\pi f}$ qui représentent la TF ne sont pas toujours faciles à mettre en évidence.

La TF atteint ses limites d'analyse et de synthèse lorsqu'on souhaite par exemple représenter un nombre *illimité* d'échantillons par un nombre *fini* de coefficients; mission que accomplit la TZ, qui permet en plus l'évaluation du degré de *stabilité* d'un système numérique.

II- DEFINITION de LA T.Z

La TZ d'un signal numérique $x(k)$ est une fonction complexe du nombre complexe z , définie par :

$$Z[x(k)] = X(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) z^{-k} \quad (181)$$

C'est une série de *Laurent* et par la suite $X(z)$ est une fonction analytique en z : $X(z)$ et toutes ses dérivées sont continues dans la région de convergence, c.a.d. la région d'existence et de finitude de $X(z)$.

Remarques

♣ En prenant $z = e^{j2\pi f}$ sur le cercle unité, la TZ $X(z)$ se confond avec la TF $X(f)$ de $x(k)$.

♣ La TF peut exister pour certains signaux sans que la TZ existe; dans ce cas la TF est *discontinue* et par la suite non analytique.

Pôles et zéros :

- p est un pôle de $X(z)$ si :

$$\lim_{z \rightarrow p} X(z) = \infty \quad (182)$$

- z_0 est un zéro de $X(z)$ si :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} X(z) = 0 \quad (183)$$

Ordre d'un pôle :

Si on peut écrire :

$$X(z) = \frac{(z - z_0)^q}{(z - p)^r} Y(z) \quad (184)$$

Alors **q** est l'ordre du zéro z_0 et **r** celui du pôle p (q et r étant des nombres naturels). $Y(z)$ est évidemment finie non nulle aux points p et z_0 .

1. Existence

Le critère de *Cauchy* appliqué à une série de la forme $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ stipule que cette série converge si $\lim_{k \rightarrow \infty} |u_k|^{1/k} < 1$.

Explicitons $X(z)$ pour tirer profit de ce critère précieux :

$$X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k) z^{-k} + \sum_{k=1}^{+\infty} x(-k) z^k \quad (185.1)$$

$$X(z) = X_-(z) + X_+(z) \quad (185.2)$$

Selon le critère de Cauchy :

$$X_-(z) \text{ converge si : } \lim_{k \rightarrow \infty} |x(k)|^{1/k} |z|^{-1} < 1.$$

$$X_+(z) \text{ converge si : } \lim_{k \rightarrow \infty} |x(-k)|^{1/k} |z| < 1.$$

Ces deux conditions définissent la *région de convergence* de $X(z)$:

$$0 \leq R_{x-} < |z| < R_{x+} \leq \infty \quad (186.1)$$

$$R_{x-} = \lim_{k \rightarrow +\infty} |x(k)|^{1/k} \quad (186.2)$$

$$R_{x+} = [\lim_{k \rightarrow +\infty} |x(-k)|^{1/k}]^{-1} \quad (186.3)$$

2. Région de convergence

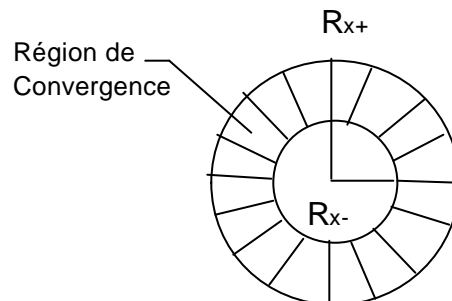


Fig.41

La région de convergence est une bande circulaire du plan complexe comprise strictement entre les deux cercles de centres l'origine et de rayons R_{x-} et R_{x+} .

Cas particuliers :

♦ $R_{x-} = +\infty$ ou $R_{x+} = 0$: $X(z)$ ne converge pour aucun nombre z .

♦ $R_{x+} = +\infty$: $X(z)$ converge pour tout nombre z extérieur au cercle de rayon R_{x-} .

♦ $R_{x-} = 0$: $X(z)$ converge sur le disque ouvert de rayon R_{x+} .

Exemples :

1. $x(k) = \text{rec}_N(k)$.

$$X(z) = \sum_{k=0}^{N-1} z^{-k} = \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}} \text{ pour } |z| > 1 \quad (187)$$

$X(z) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) z^{-m}$ possède N zéros d'ordre 1 qui sont les racines $N^{\text{ième}}$: $e^{j2\pi m/N}$, $m=0 \dots N-1$.

La région de convergence est \mathbb{C}^* .

2. $x(k) = e(k)$.

$$X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{-k} = \frac{1}{1-z^{-1}} \text{ pour } 1 < |z| \quad (188)$$

$R_{x-} = 1$ et $R_{x+} = +\infty$.

Remarque : la fonction $\frac{1}{1-z^{-1}}$ est définie pour tout complexe différent de 1, mais elle n'est la transformée en z d'un signal que pour $1 < |z|$.

3. $x(k) = a^k e(k)$.

$$X(z) = \sum_{k=0}^{N-1} (az^{-1})^k = \frac{1}{1-az^{-1}} \text{ pour } |a| < |z| \quad (189)$$

$R_{x-} = |a|$ et $R_{x+} = +\infty$.

III- TRANSFORMEE en Z INVERSE

Le théorème de Cauchy sur l'intégration le long d'un contour renfermant l'origine du plan complexe nous indique que :

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} z^{k-1} dz = \delta(k) \quad (190)$$

Où $\delta(k)$ désigne l'impulsion numérique de Dirac, égale à un pour $k=0$ et nulle pour $k \neq 0$.

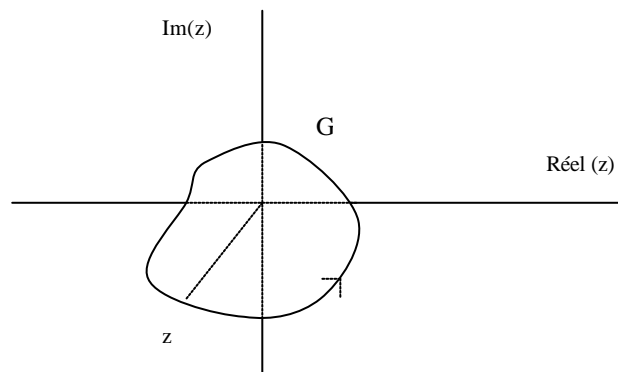


Fig.42

En choisissant un contour Γ dans la région de convergence de $X(z)$ et en utilisant le théorème de Cauchy, on arrive à exprimer la TZ inverse :

$$x(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} X(z) z^{k-1} dz \quad (191)$$

On distingue plusieurs méthodes de calcul du signal $x(k)$ à partir de $X(z)$.

1. Méthode des résidus

L'intégrale peut-être évaluée directement en utilisant le théorème des résidus. Le résidu d'un pôle **a** d'ordre **q** de la fonction complexe $f(z)$ est la valeur limite suivante :

$$\text{Res}(a,q) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{q-1}}{dz^{q-1}} \frac{f(z)(z-a)^q}{(q-1)!} \quad (192)$$

Cas particuliers:

$$\text{Res}(a,1) = \lim_{z \rightarrow a} f(z) \cdot (z-a) \quad (193.1)$$

$$\text{Res}(a,2) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{d}{dz} f(z) \cdot (z-a)^2 \quad (193.2)$$

Théorème des résidus

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{\text{pôles}} \text{Res}[f(z)]_{\Gamma} \quad (194)$$

La sommation porte sur les pôles de $f(z)$ contenus à l'intérieur de Γ

Finalement :

$$\mathbf{x}(\mathbf{k}) = \sum_{\text{pôles}} \text{Res}[X(z)z^{k-1}]_{\Gamma} \quad (195)$$

Exemple : $X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$

On a :

$$\mathbf{x}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{z^k}{z-1} dz$$

Région de convergence : $1 < |z|$.

Pôles de $X(z) \cdot z^{k-1} = \frac{z^k}{z-1}$:

$$\begin{aligned} p_1 &= 1 \text{ d'ordre } q=1, \quad \forall k \\ p_2 &= 0 \text{ d'ordre } q=-k, \text{ pour } k < 0 \end{aligned}$$

Choix de Γ : Un cercle de centre l'origine et de rayon strictement *supérieur à un*.

$$\text{Res}(1,1) = 1 \quad \forall k$$

$$\text{Res}(0,-k) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^{-k}}{dz^{-k}} \frac{z^k z^{-k}}{(z-1)(-k-1)!} \text{ pour } k < 0$$

Soit :

$$\text{Res}(0,1-k) = \frac{1}{(-k-1)!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^{-k}}{dz^{-k}} \frac{1}{(z-1)} = -1 \text{ pour } k < 0$$

Finalement :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\mathbf{k}) &= -1 + 1 = 0 \text{ pour } k < 0 \\ \mathbf{x}(\mathbf{k}) &= 1 \text{ pour } 0 = k \end{aligned}$$

Soit : $x(k)=e(k)$, ce qui nous permet d'écrire :

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{-k} \quad (196)$$

2. Développement en série de puissances

La fonction complexe $X(z)$ peut-être développée en série de *Taylor*, la variable étant $u=z^{-1}$.

Les coefficients de ce développement sont justement les échantillons $x(k)$.

Le développement $X(u) = \sum_k A_k u^k$ est suivi de l'identification $x(-k)=A_k$.

Exemple : $X(z) = e^{z^{-1}} (1 + z^{-1})$

On a :

$$e^{z^{-1}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{-k}}{k!} \quad (197)$$

D'où :

$$X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{-k} (k+1)}{k!}$$

Ce qui donne par identification : $x(k) = \frac{k+1}{k!} e(k)$.

3. Développement par division ou en fractions rationnelles

La transformée en z qui peut se mettre sous la forme d'un rapport de polynômes en z $X(z)=P(z)/Q(z)$, permet de restituer les échantillons du signal original, ceci en effectuant une division simple de polynômes, ou un développement en fractions rationnelles de degré un.

Exemple : $X(z) = \frac{1+z^{-1}}{2+z^{-1}-3z^{-2}}$

qui peut se mettre sous la forme simple :

$$X(z) = \frac{1}{5} \left(\frac{3}{2+3z^{-1}} + \frac{1}{1-z^{-1}} \right) \cdot (1+z^{-1})$$

Ensuite on utilise la relation (196).

IV- PROPRIETES de LA T.Z

1. Théorème de la valeur initiale

Soit $x(k)$ un signal causal (nul pour $k<0$).

La connaissance de la TZ nous fournit la valeur exact de $x(0)$:

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) \quad (198)$$

Exercice : Démontrer ce théorème.

2. Linéarité, Décalage, Dérivée

Linéarité

$$\mathbf{Z}[a.x(k)+b.y(k)] = a.X(z)+b.Y(z) \quad (199)$$

a et b étant des constantes complexes.

La région de convergence du terme de gauche contient *au moins l'intersection* des zones de convergence de X(z) et Y(z).

Retard

$$\mathbf{Z}[x(k-k_0)] = z^{-k_0} . X(z) \quad (200)$$

Les régions de convergence sont identiques.

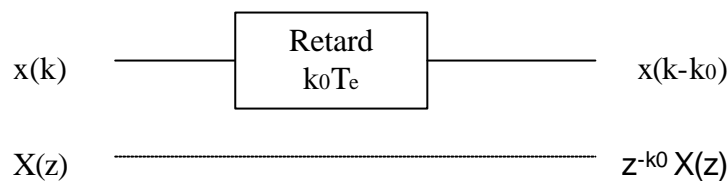


Fig.43

Changement d'échelle

Si on effectue le changement de variable $w=z/a$, où a est un nombre réel non nul, on exprime la transformée en w de x(k).

$$X(z/a) = \mathbf{Z}[a^k . x(k)] \quad (201)$$

La région de convergence de X(z/a) est : $a R_{x-} < |z| < a R_{x+}$.

Dérivation

En dérivant la TZ X(z) par rapport à z, on aboutit à la relation suivante:

$$\frac{dX(z)}{dz} = -\frac{1}{z} \mathbf{Z}[k . x(k)] \quad (202)$$

3. Corrélation, Convolution

Corrélation

Soient x(k) et y(k) deux signaux numériques. La TZ de $R_{xy}(k)$ est le produit simple $X(1/z).Y(z)$ dont la région de convergence *peut-être plus large* (compensation des pôles éventuels) :

$$\mathbf{Z}[R_{xy}(k)] = X(1/z).Y(z) \quad (203)$$

Convolution

$$\mathbf{Z}[x(k)*y(k)] = X(z).Y(z) \quad (204)$$

On peut faire la même remarque précédente concernant les zones de convergence.

4. Théorème du produit de convolution complexe

La TZ du produit simple de deux signaux $x(k)$ et $y(k)$ est un produit de convolution différent de celui qu'on a défini jusqu'à présent : Il est dit complexe. Γ étant un contour fermé de la zone de convergence de $Y(w)$:

$$\mathbf{Z}[x(k).y(k)] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} X\left(\frac{z}{w}\right) Y(w) w^{-1} dw \quad (205)$$

La région de convergence s'obtient en combinant celle de $X(z/w)$ et celle de $Y(w)$:

$$R_x \cdot R_y < |z| < R_x + R_y \quad (206)$$

V- FONCTION de TRANSFERT

Un système numérique linéaire invariant peut-être décrit soit par sa réponse impulsionnelle $h(k)$, soit par sa réponse harmonique ou fréquentielle $H(f)$.

La transformée **$H(z)$** de $h(k)$ contribue à une description plus générale des systèmes linéaires invariants (SLI).

La TZ de la sortie $y(k)$ d'un SLI est liée à celle de l'entrée $x(k)$ par l'intermédiaire de la fonction de transfert $H(z)$:

$$y(k) = h(k) * x(k) \quad (207.1)$$

$$Y(z) = H(z).X(z) \quad (207.2)$$

1. Causalité

Un SLI causal possède une fonction de transfert de la forme:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} h(k) z^{-k} \quad (208)$$

La région de convergence étant définie par :

$$R_h = \lim_{k \rightarrow +\infty} |h(k)|^{\frac{1}{k}} < |z| \quad (209)$$

Tous les pôles de $H(z)$ sont à l'intérieur du cercle de centre l'origine et de rayon R_h .

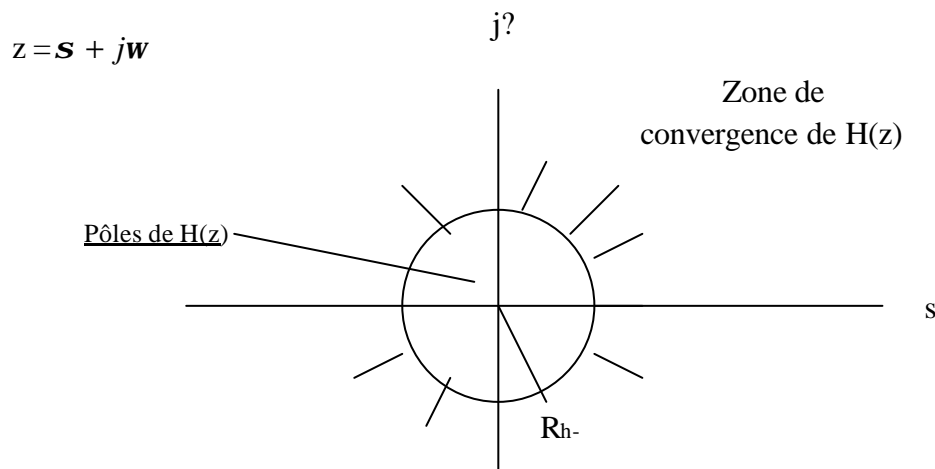


Fig.44

2. Stabilité des systèmes LI

Rappelons qu'un système est dit stable si, son entrée ou le signal d'excitation étant *bornée*, sa sortie ou sa réponse est bornée. Ceci étant équivalent à la condition de convergence :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |h(k)| < +\infty \quad (210)$$

Corollaires :

- Quand un système est stable le cercle unité du plan complexe est *contenu* dans la région de convergence: $R_h < 1$.
- Tous les pôles d'un système stable sont contenus *strictement* à l'intérieur du cercle unité.

Exercice : démontrer ces deux corollaires.

Remarques :

- *stabilisation d'un système*

On peut rendre stable un SLI instable en multipliant sa réponse impulsionnelle $h(k)$ par un signal exponentiel adéquat a^k , a étant un réel suffisamment faible. Cette opération aura pour effet de déplacer les pôles vers l'intérieur du cercle unité.

- *Stabilité des signaux*

On peut étendre la notion de stabilité des systèmes LI aux signaux numériques.

Un signal est stable si les pôles de sa TZ sont strictement à l'intérieur du cercle unité.

Exemple :

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$

$H(z)$ possède un zéro $z_1 = 0$ et un pôle $p = a$.

- ✓ Le système est stable si la région de convergence contient le cercle unité. Comme le pôle doit être en dehors de cette région, la stabilité exige $|a| < 1$.

3. Signaux et systèmes LI à phase minimum

Ce sont les signaux et systèmes dont *les zéros* et *les pôles* de la TZ sont strictement à l'intérieur du cercle unité. Dans ce cas $H(z)$ et son inverse $1/H(z)$ sont stables.

On les appelle aussi des signaux *absolument sommables*. On y reviendra dans le chapitre traitant des filtres numériques.

4. Système régi par une équation aux différences

Une catégorie de SLI est caractérisée par une équation aux différences, liant la sortie $y(k)$ à l'entrée $x(k)$ de la manière suivante :

$$\sum_{n=0}^N a_n y(k-n) = \sum_{m=0}^M b_m x(k-m) \quad (211)$$

On dira que cette équation est *d'ordre N* dans la mesure où la sortie à l'instant k dépend de toutes les N dernières sorties.

En évaluant la TZ, on obtient $Y(z)=H(z).X(z)$, avec:

$$H(z) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{\sum_{n=0}^N a_n z^{-n}} \quad (212.1)$$

Ou encore :

$$H(z) = C \frac{\prod_m (1 - z_m z^{-1})}{\prod_n (1 - p_n z^{-1})} \quad (212.2)$$

La fonction de transfert $H(z)$ possède N pôles p_n et M zéros z_m .

La détermination de ces nombres particuliers permet de caractériser complètement le système en question, en particulier sa stabilité.

Ainsi comme on l'avait invoqué en introduisant ce chapitre, la transformée en z permet de caractériser un système ou un signal à l'aide d'un nombre limité de coefficients, une qualité dont la transformée de Fourier ne dispose pas.

Exemple : $H(z) = \frac{1 - z^{-1} + 0.5z^{-2}}{0.5 + 2z^{-1} + z^{-2}}$

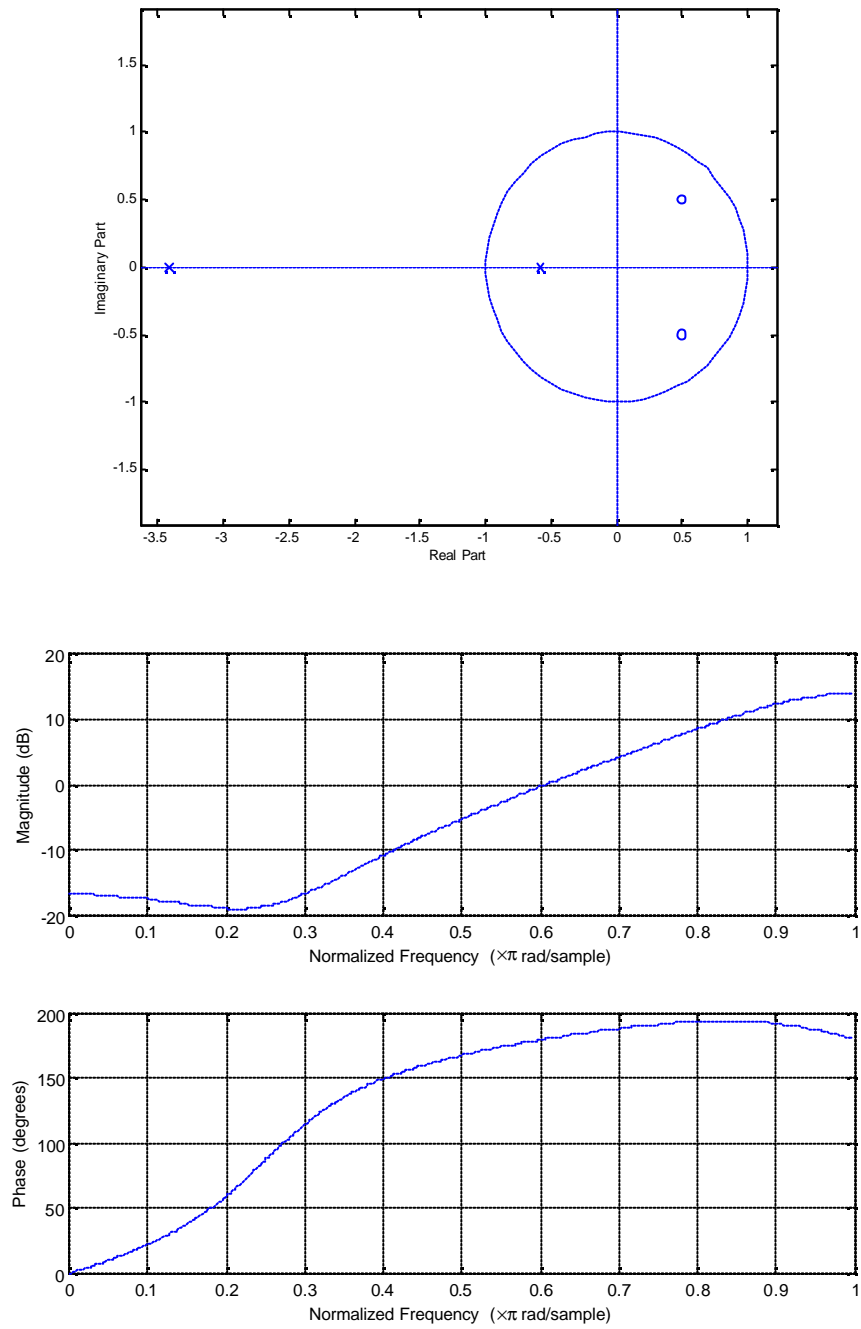


Fig.45

Ch. XI : LES FILTRES NUMERIQUES

I- INTRODUCTION

II- FILTRES IDEAUX et GABARIT

III- FILTRES A REPONSE IMPULSIONNELLE DE DUREE FINIE (RIF)

IV - FILTRES A REPONSE IMPULSIONNELLE DE DUREE INFINIE (RII)

V- SYSTEMES A PHASE MINIMUM

I- INTRODUCTION

Dans le but de simuler des filtres analogiques, les filtres numériques ont été développés et étudiés afin d'optimiser les divers paramètres avant toute réalisation matérielle définitive. Ceci a conduit à des méthodes propres au filtrage numérique; ajoutées au coût moindre des circuits intégrés ces derniers ont acquis une indépendance et un essor considérables.

Notre objectif présent est l'élaboration d'un système numérique linéaire invariant causal et stable possédant la réponse fréquentielle désirée $H(f)$ et une réponse impulsionnelle $h(k)$ dont la réalisation soit efficace.

On trouve dans la littérature une très grande variété de méthodes de synthèse des filtres numériques, on en étudiera les principales et les plus simples.

Deux classes importantes de filtres numériques se distinguent :

- Les filtres à réponse impulsionnelle $h(k)$ de durée finie L (RIF) :

$$h(-L/2), h(1), \dots, h(L/2-1).$$
- Les filtres qui possèdent une réponse impulsionnelle à durée infinie (RII).

D'une autre part la nature de la mise en œuvre de l'opération de filtrage nous conduit aux trois formes de réalisations suivantes :

♦ Une réalisation *non récursive* (transversale) :

La sortie $y(k)$ du filtre est calculée directement à partir de l'entrée *actuelle* $x(k)$ et des entrées passées $x(k-m)$:

$$y(k) = F[x(k), x(k-1), \dots, x(k-m), \dots, x(k-M)]$$

♦ Une réalisation *récursive* :

La sortie est calculée à partir de l'entrée et les sorties passées :

$$y(k) = F[x(k), y(k-1), \dots, y(k-m), \dots, y(k-N)]$$

♦ Une synthèse par la TFD :

Cette méthode se trouve avantageuse lorsque la réponse impulsionnelle $h(k)$ dépasse environ trente échantillons.

Réalisation par la transformée en Z

Si on dispose de la fonction de transfert $H(z)$ du filtre numérique, deux réalisations par décomposition sont possibles : Une décomposition en série ou en parallèle.

1. Décomposition en série

La réalisation d'un système de premier ordre présente le minimum de difficultés dans notre contexte ; pour cette raison $H(z)$ est mise sous la forme d'un produit de fonctions de transfert simples de premier ordre :

$$H(z) = \prod_n H_n(z) \quad (213.1)$$

$$H_n(z) = \frac{a_n}{1 - p_n z^{-1}} \quad (213.2)$$

En notant x_n et y_n les entrées et les sorties respectives des systèmes $H_n(z)$:

$$x_1(k) = x(k) \quad (214.1)$$

$$x_{n+1}(k) = y_n(k) \quad (214.2)$$

$$y_n(k) - p_n \cdot y_n(k-1) = a_n \cdot x_n(k) \quad (214.3)$$

Le système global est ainsi réalisé en mettant en cascade un certain nombre de sous-systèmes de premier ordre.

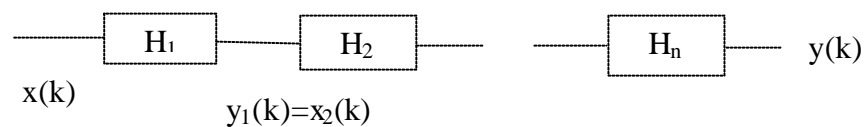


Fig.46

2. Décomposition en parallèle

$H(z)$ est mise sous la forme d'une somme de fonctions de transfert simples de premier ordre :

$$H(z) = \sum_n H_n(z) \quad (215)$$

Auquel cas :

$$x_n(k) = x(k)$$

$$y(k) = \sum_n y_n(k)$$

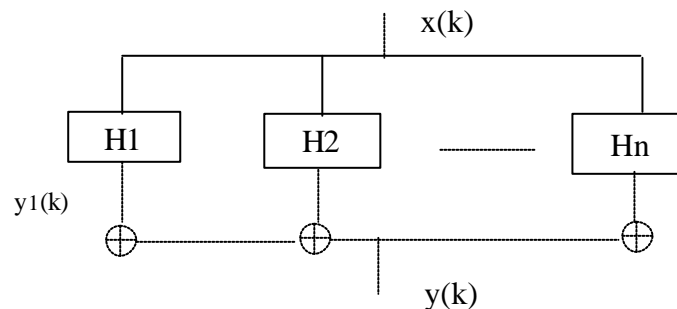


Fig.47

Les opérations élémentaires qui interviennent dans ces deux réalisations sont *le retard, la multiplication et l'addition*

Une structure de réalisation est dite *canonique* lorsqu'elle utilise un *minimum* d'opérations élémentaires.

Généralement les spécifications d'un filtre sont données dans le domaine fréquentiel. Ceci nous conduit au point de départ de la synthèse du filtre proprement dit : La donnée de la réponse en fréquence $H(f)$ ou de son module.

II- FILTRES IDEAUX et GABARITS

Le module de la réponse fréquentielle des filtres idéaux courants est donné sur une période $[-F_e/2, F_e/2]$.

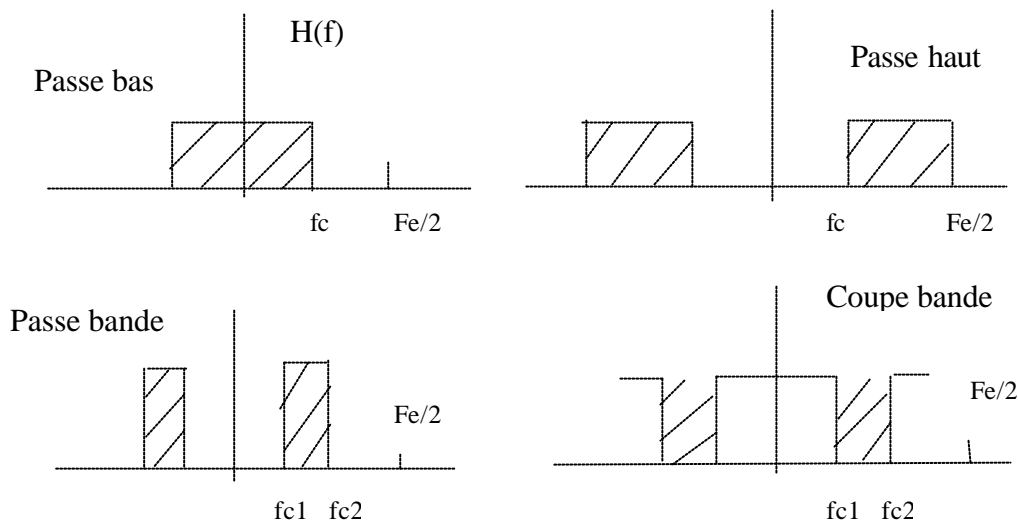


Fig.48

Gabarit

Il est évident que les réponses fréquentielles schématisées sont irréalisables. On doit spécifier aussi les *tolérances* ou le *gabarit* qui définit les dépassements permis par rapport au modèle idéal (sorte de *cahier de charge* à respecter) :

Δ_{att} : Le module de l'atténuation dans la bande coupée.

Δ_{ond} : Le module de l'ondulation ou fluctuation dans la bande passante.

Δ_{trans} : La largeur en Hz de la bande de transition, située entre la fréquence de coupure et la zone atténuée, la coupure d'un filtre n'étant jamais parfaite.

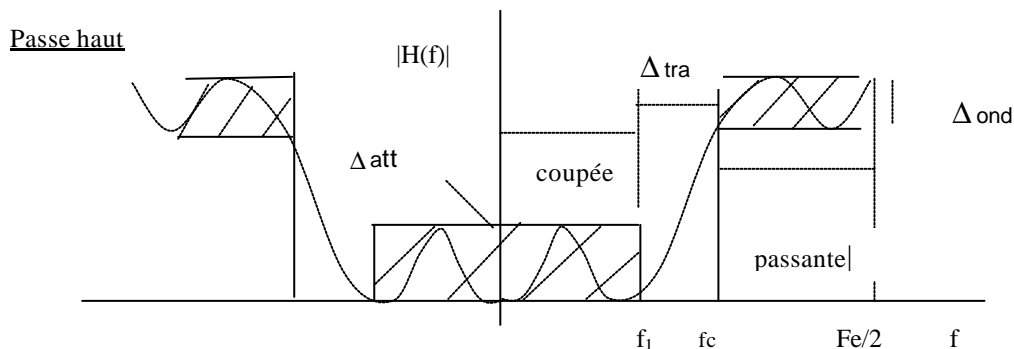


Fig.49

Détermination des pôles et zéros à partir du gabarit

Observons le gabarit de la figure 49 :

- Un maximum de la bande passante à une fréquence f_0 correspond à deux pôles $z = r.e^{j2\pi f_0}$ et son conjugué z^* . On a intérêt à choisir z juste à l'intérieur du cercle unité (r proche de 1) pour garantir un gain important dans la bande passante.
- Un passage par zéro correspond à un zéro et son conjugué.

Les spécifications qui concernent la phase sont dictées par les principes de stabilité et de causalité; disons brièvement que la phase doit être choisie de manière à avoir tous les pôles et zéros de la fonction de transfert à l'intérieur du cercle unité.

Le gabarit étant connu, il faut trouver le système qui le satisfasse.

On dispose de deux approches possibles :

- L'outil algorithmique fourni par les mathématiques.
- Puiser dans l'arsenal des méthodes de synthèse des filtres analogiques et opérer une transposition au cas numérique en respectant les règles qui s'imposent; ceci permet en même temps la simulation numérique des filtres analogiques.

III. FILTRES RIF (réponse impulsionnelle finie)

La réponse impulsionnelle $h(k)$ à durée finie L et dont les valeurs des échantillons sont finies correspond à un système stable et causal (moyennant un nombre fini de décalages). Sa fonction de transfert $H(z)$ a pour unique pôle l'origine

($H(z) = \sum_{k=0}^{L-1} h(k)z^{-k}$ converge pour tout complexe non nul).

1. Synthèse par TFD

Le gabarit de $H(f)$ étant donné, on prélève L échantillons $H(n)$ de $H(f)$, régulièrement décalés. Deux approches sont possibles :

a- La TFD inverse de la relation $Y(n) = H(n)X(n)$ fournit la sortie $y(k)$.

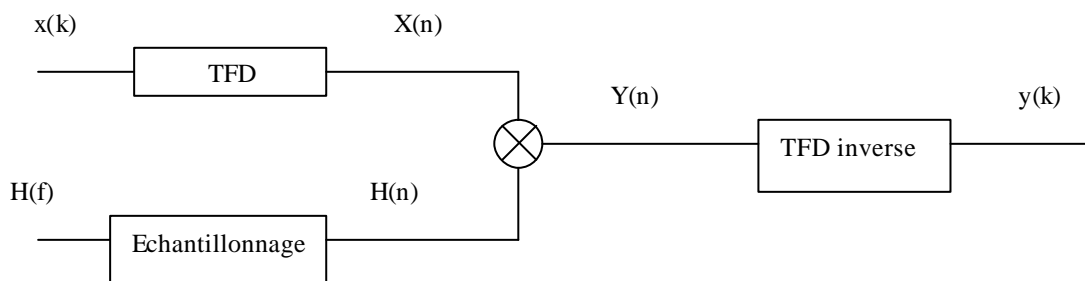


Fig.50

Cette méthode de synthèse n'obéit pas aux exigences du *temps réel* puisqu'on doit disposer de tous les échantillons de l'entrée $x(k)$ avant le calcul de $X(n)$.

b- On opère une TFD inverse de $H(n)$ pour obtenir une approximation $\tilde{h}(k)$ de $h(k)$. Le produit de convolution $x(k) * \tilde{h}(k)$ donne directement la sortie du filtre $y(k)$.

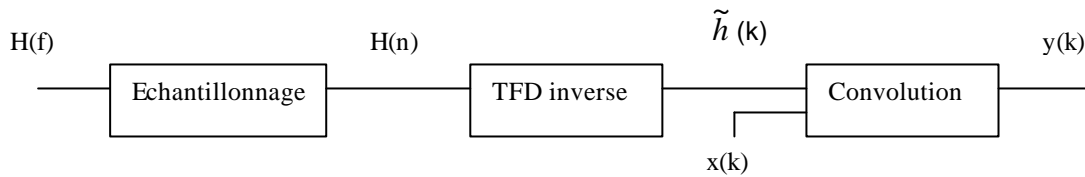


Fig.51

Exemple : On veut synthétiser le filtre passe haut idéal suivant :

$$H(f) = 0 \text{ pour } 0 = f < 0.25 \quad (216.1)$$

$$H(f) = 1 \text{ pour } 0.25 = f = 0.5 \quad (216.2)$$

$$H(-f) = H(f) \quad (216.3)$$

Exercice : Démontrer que $h(k)$ n'est pas causale et qu'elle est paire.

On commence par prélever $L=32$ échantillons équidistants de $H(f)$:

$$H(n) = H\left(\frac{n}{L}\right), \quad n = -L/2 \dots L/2 - 1 \quad (217)$$

On calcule ensuite la TFD inverse $\tilde{h}(k)$ de $H(n)$.

Pour rendre causale $\tilde{h}(k)$ on opère un retard de $L/2$; ce retard implique une réponse en phase linéaire $-j.p.f.L$.

Finalement on compare la TF de $\tilde{h}(k)$, soit $\tilde{H}(f)$, à $H(f)$.

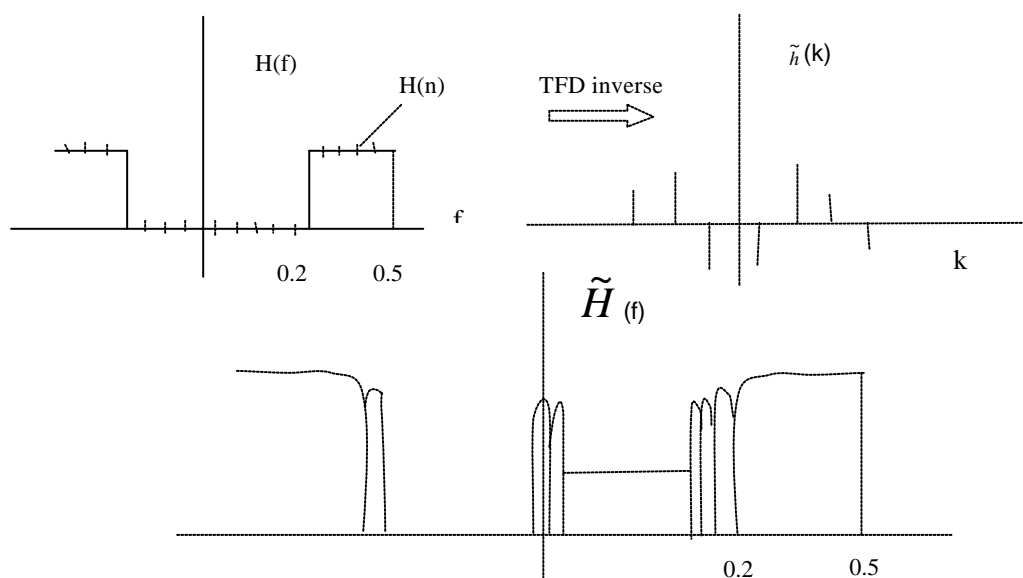


Fig.52

2. Synthèse récursive

A partir des L échantillons $H(n)$ prélevés de $H(f)$ on déduit $H(z)$ par *interpolation linéaire*. En effet, on exprime la TFD inverse :

$$h(k) = \frac{1}{L} \sum_{n=-L/2}^{L/2-1} H(n) e^{j2\pi nk/L} \quad (218)$$

D'autre part :

$$H(z) = \sum_{k=-L/2}^{L/2-1} h(k) z^{-k}$$

Finalement :

$$H(z) = \frac{1}{L} (1 - z^{-L}) \sum_{n=-L/2}^{L/2-1} \frac{H(n)}{1 - z^{-1} e^{j2\pi n/L}} \quad (219)$$

Exercice : démontrer ce dernier résultat.

On peut condenser la relation (219) sous la forme :

$$H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z) \quad (220)$$

Où $H_1(z)$ est une fonction de transfert d'ordre L :

$$H_1(z) = 1 - z^{-L} \quad (221)$$

Et $H_2(z)$ une somme de L fonctions de transfert $H_n(z)$ d'ordres 1 :

$$H_2(z) = \frac{1}{L} \sum_{n=-L/2}^{L/2-1} H_n(z) \quad (222)$$

$$H_n(z) = \frac{H(n)}{1 - z^{-1} e^{j2\pi n/L}} \quad (223)$$

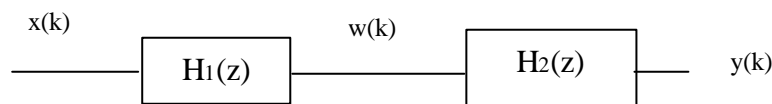


Fig.53

Filtre en peigne $H_1(z)$ (**comb filter**)

La fonction de transfert (221) possède un pôle d'ordre L à l'origine et L zéros sur le cercle unité (les racines L -ième de l'unité $e^{j2\pi n/L}$). Sa réponse impulsionnelle $h_1(k)$ de durée $L+1$ est :

$$h_1(k) = \delta(k) - \delta(k-L) \quad (224)$$

La sortie intermédiaire $w(k)$ de $H_1(z)$ est calculée à l'aide de L retards et une soustraction. Sa RF est donnée par :

$$H_1(f) = 1 - e^{-j2\pi fL} \quad (225)$$

De période $1/L$. Cela lui confère la nomination « *filtre en peigne* ».

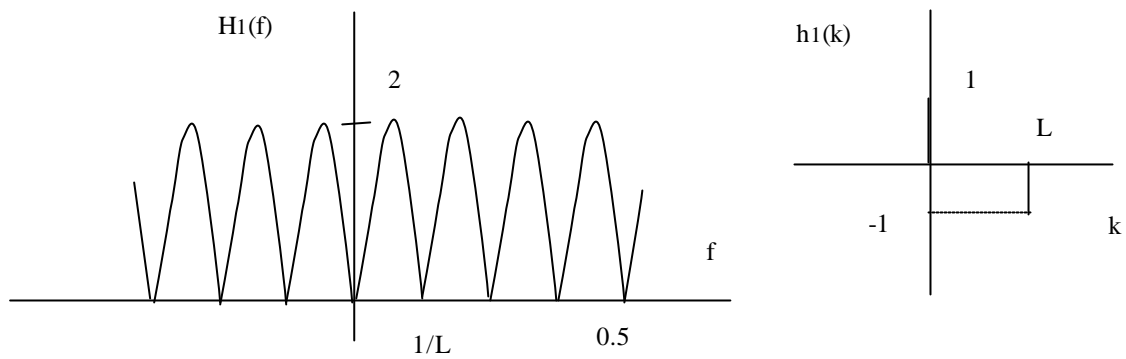


Fig.54

Structure de $H_2(z)$

Les L filtres de premier ordre $H_2(z) = \frac{H(n)}{1 - z^{-1}e^{j2\pi n/L}}$, dont l'entrée commune est $w(k)$, sont réalisés récursivement de la manière suivante :

$$y(k) - a_n y(k-1) = b_n w(k)$$

$$a_n = e^{j2\pi n/L}, \quad b_n = H(n)$$

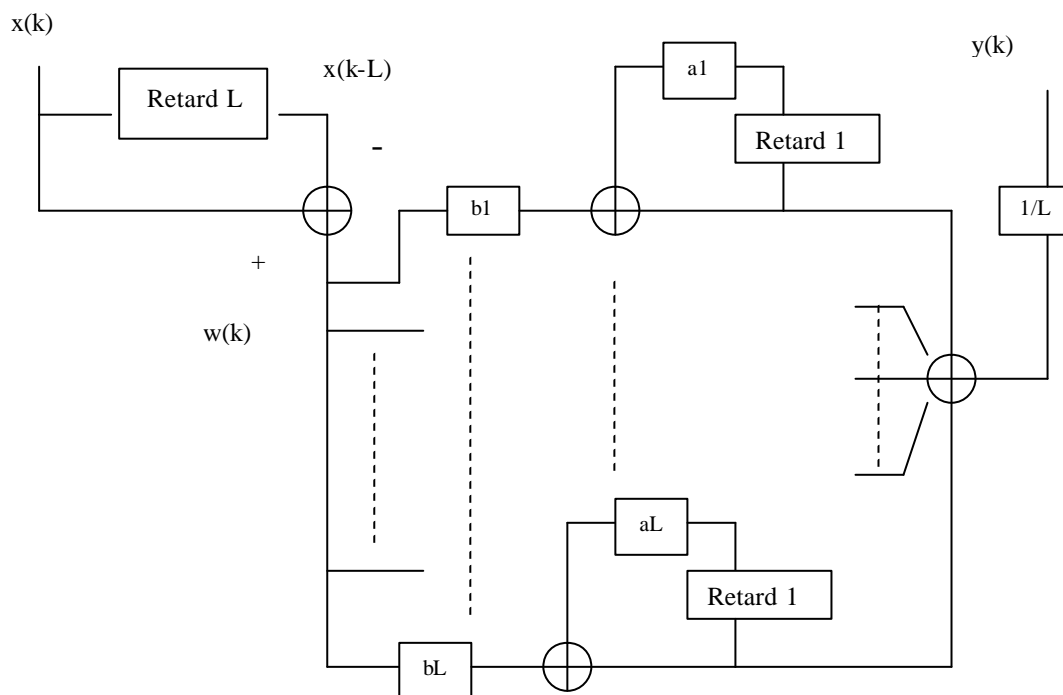


Fig.55

Remarques

- Les pôles simples a_n de $H_2(z)$ coïncident avec les zéros de $H_1(z)$ ce qui assure la stabilité du système global.

- Le processus de quantification des coefficients risque de déplacer ces pôles et zéros et par la suite briser cette compensation qui assure la stabilité; on remédie à cela en déplaçant les pôles et les zéros légèrement vers l'intérieur du cercle unité en remplaçant z par z/r où r est légèrement inférieur à 1 ($1-2^{-23}$ peut suffire) et l'effet sur $H(f)$ s'avère être négligeable.
- Le fait que les coefficients a_n et b_n soient complexes complique la mise en œuvre de la récursivité.
- Dans le cas d'une réponse impulsionnelle réelle les échantillons $H(n)$ et $H(-n)$ sont conjugués et leurs combinaisons dans l'expression de $H(z)$ permet une réduction considérable du nombre d'opérations élémentaires.

Exemple

On veut synthétiser un filtre passe bande :

$$H(f) = 1 \text{ pour } f_1 = |f| = f_2$$

$$H(f) = 0, \text{ ailleurs}$$

Où $f_1 = 3/16$ Hz et $f_2 = 5/16$ Hz.

On prélève $L=16$ échantillons $H(n)$, $n = -8, \dots, 7$, correspondants aux fréquences n/L .

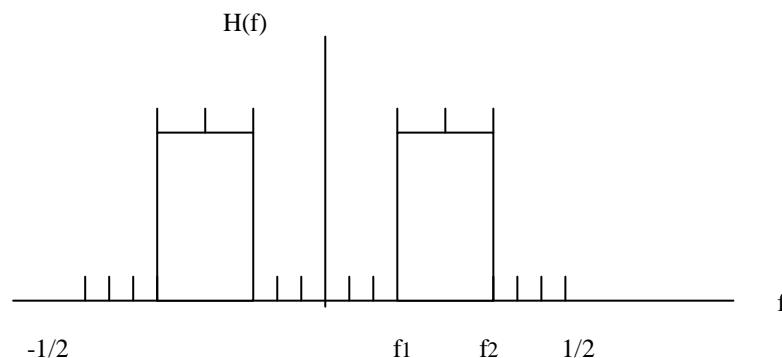


Fig.56

Seuls six échantillons $H(n)$ ne sont pas nuls $n=-5,-4,-3,3,4,5$.

$$H_3(z) + H_{-3}(z) = \frac{-0.831(1 - z^{-1})}{1 - 0.765z^{-1} + z^{-2}}$$

$$H_4(z) + H_{-4}(z) = \frac{0.707(1 - z^{-1})}{1 + z^{-2}}$$

$$H_5(z) + H_{-5}(z) = \frac{-0.556(1 - z^{-1})}{1 + 0.765z^{-1} + z^{-2}}$$

Exercice: vérifier ces relations.

Alors :

$$y(k) = \frac{1}{L} \cdot [y_1(k) + y_2(k) + y_3(k)]$$

Avec :

$$Y_n(z) = W(z) \cdot H_n(z)$$

$$W(z) = X(z) \cdot (1 - z^{-16})$$

Remarque :

La réalisation non récursive par convolution nécessitera $L=16$ opérations élémentaires par échantillons, alors qu'ici seules six opérations et six additions sont nécessaires.

IV- FILTRES RII (réponse impulsionnelle infinie)

Nous disposons de deux approches pour la synthèse des filtres RII:

- Les méthodes algorithmiques d'optimisation.
- La transposition des filtres analogiques au cas numérique.

Nous étudierons uniquement les aspects de cette dernière méthodologie.

Exemple Cellule RC

Reprenons l'équation différentielle du filtre analogique RC : $R.C.y'(t)+y(t)=x(t)$

On peut la numériser de la manière suivante :

$$t_e \cdot \frac{y(k) - y(k-1)}{T_e} + y(k) = x(k) \quad (226.1)$$

$$y(k) - a \cdot y(k-1) = b \cdot x(k) \quad (226.2)$$

$$a = \frac{t_e}{T_e + t_e}, \quad b = \frac{T_e}{T_e + t_e} \quad (226.3)$$

Si on prend la transformée en z , on obtient : $H(z) = \frac{b}{1 - az^{-1}}$, dont l'unique pôle est $a < 1$. Ce filtre est bien stable et causal.

On considère à présent les filtres RII régis par une équation aux différences linéaire de la forme : $\sum a_n \cdot y_n(k-n) = \sum b_m \cdot x_n(k-m)$, dont la fonction de transfert est $H(z)$ et la réponse impulsionnelle $h(k)$.

Notre objectif est la détermination des coefficients a_n et b_m qui satisfont le gabarit et d'assurer la causalité et la stabilité du système final.

On cherche d'abord le filtre analogique de fonction de transfert $H_a(p)$ qui satisfait les contraintes imposées, $H_a(p)$ étant la transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle analogique $h_a(t)$.

Ensuite un lien de transposition est créé avec la fonction de transfert $H(z)$ du filtre numérique souhaité.

La clef de ce lien est le passage du plan des p :

$$\mathbf{p} = \mathbf{s} + j2\pi f_s \quad (227)$$

au plan des z :

$$\mathbf{z} = \mathbf{r} e^{j2\pi f} \quad (228)$$

Ceci est possible via une transformation $\mathbf{p} = \mathbf{T}(\mathbf{z})$, ainsi cherchera-t-on à exprimer p en fonction de z .

A un traitement analogique correspond un traitement numérique spécifié aboutissant à $H(f) = H_a(T(z))$.

Généralement le filtre analogique est régi par une équation différentielle linéaire à coefficients constants. La dérivation et l'intégration analogiques permettent de créer le pont souhaité.

1. Equivalence de la dérivation

Au dérivateur analogique :

$$y_a(t) = \frac{dx_a(t)}{dt} \quad (229.1)$$

$$H_a(p) = p \quad (229.2)$$

On fait correspondre le dérivateur numérique suivant, en notant $x(k) = x_a(kT_e)$, :

$$y(k) = \frac{1}{T_e} [x(k) - x(k-1)] \quad (230.1)$$

$$H(z) = \frac{1}{T_e} (1 - z^{-1}) \quad (230.2)$$

On en déduit la transformation :

$$p = \frac{1}{T_e} (1 - z^{-1}) \quad (231.1)$$

$$z = \frac{1}{1 - pT_e} \quad (231.2)$$

Image de l'axe imaginaire $p = j2\pi f_a$

Démontrer que dans ce cas, $z = a + j.b$: $(a - 0.5)^2 + b^2 = 0.25$, qui définit le cercle $C(1/2, 0)$ de rayon $1/2$ et de centre le point $1/2$.

Préservation de la stabilité

L'image du demi-plan gauche $\text{Re}(p) = s < 0$, lieu des pôles d'un système analogique stable, est l'intérieur du cercle $C(1/2, 1/2)$ qui se trouve à l'intérieur du cercle unité lieu des pôles d'un filtre numérique stable.

Exercice : démontrer ce dernier résultat.

Remarques

- Le dérivateur $F_e[x(k+1) - x(k)]$ n'est pas causal et ne préserve pas toujours la stabilité.
- Un sur-échantillonnage se trouve nécessaire pour réaliser une bonne approximation numérique de la dérivation à cause de la définition même de cette dernière.

2. Equivalence de l'intégration

A l'intégrateur analogique :

$$y_a(t) = \int_0^t x_a(u) du \quad (232.1)$$

$$H_a(p) = \frac{1}{p} \quad (232.2)$$

On fait correspondre l'intégrateur numérique suivant :

$$y(k) = y(k-1) + \frac{x(k) + x(k-1)}{2} \cdot T_e \quad (233.1)$$

$$H(z) = \frac{T_e}{2} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \quad (233.2)$$

$y(k)$ est l'approximation connue de l'intégrale par la règle des trapèzes. On en déduit la transformation $p=T(z)$ qui est *bilinéaire* dans ce cas :

$$p = \frac{2}{T_e} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \quad (234.1)$$

$$z = \frac{1 + \frac{T_e}{2} p}{1 - \frac{T_e}{2} p} \quad (234.2)$$

Image de l'axe imaginaire :

$$z = e^{j2a \tan(pf / f_e)} \quad (235)$$

Exercice : démontrer ce résultat.

Ce lieu image de l'axe imaginaire des p décrit le cercle unité de centre l'origine. D'autre part le demi-plan gauche $s < 0$ s'applique à l'intérieur de $C(0,1)$ ce qui préserve la stabilité.

Distorsions de l'axe des fréquences

Il se trouve qu'une fréquence analogique f_a ne correspond pas à la même fréquence numérique f (variable du gabarit souhaité $H(f)$).

En effet, nous avons d'une part :

$$H(f) = H[z = e^{j2\pi f T_e}]$$

Et d'autre part :

$$H_a(f_a) = H(p = j2\pi f_a)$$

Ce qui conduit à la relation entre f et f_a :

$$f_a = \frac{f_e}{p} \cdot \tan\left(p \frac{f}{f_e}\right) \quad (236)$$

On peut remarquer que pour les fréquences f *faibles* devant la fréquence d'échantillonnage, les deux fréquences f et f_a sont presque identiques.

Ainsi, si f_c désigne une fréquence de coupure du filtre numérique souhaité, le filtre analogique à transposer a pour fréquence de coupure, non pas f_c , mais la fréquence $(f_e/\pi)\tan(\pi f_c/f_e)$.

Exemple : *filtre passe bas de Tchebycheff*

$$|H_a(f_a)| = \frac{1}{\sqrt{1 + m^2 T_K^2(f_a)}} \quad (237)$$

Où $m < 1$ détermine l'amplitude des oscillations dans la bande passante et $T_K(f_a)$ est le polynôme de Tchebycheff d'ordre K (déterminé par l'atténuation de la bande coupée):

$$T_K(f_a) = \begin{cases} \cos(K \arccos(2pf_a)) & 0 \leq |f_a| \leq 1/2p \\ \cosh(K \operatorname{arccosh}(2pf_a)) & 1/2p < |f_a| \end{cases} \quad (238)$$

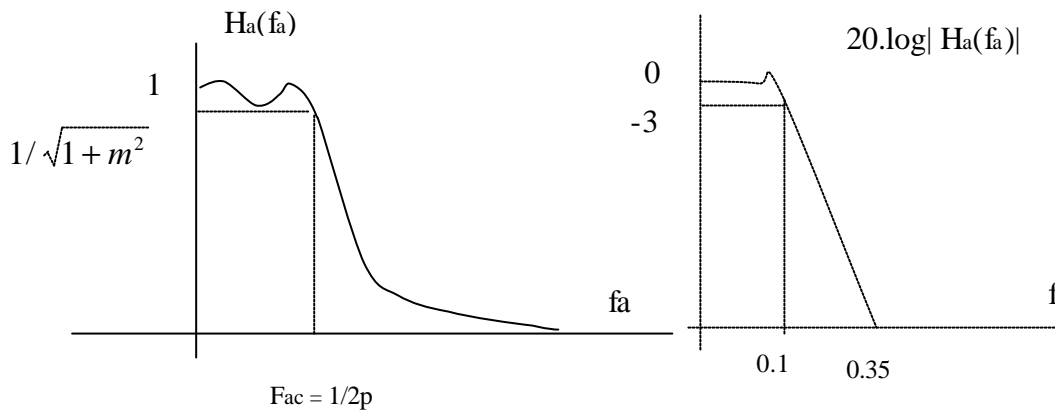


Fig.57

On veut synthétiser un passe bas avec une ondulation inférieure à 0.5dB, une fréquence de coupure de 0.1Hz et une atténuation d'au moins 40dB à 0.3Hz. On prend $T_e=1s$.

- *Détermination de m :*

$$0.5 = 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}, \text{ donc } m = 0.349.$$

- *Détermination de la plage de fréquence :*

[0.1Hz, 0.3Hz] numérique est équivalente, en vertu de $f_a = (f_e/\pi) \tan(\pi f/f_e)$ à [0.103Hz, 0.438Hz] analogique.

- *Détermination de l'ordre K :*

On exige du filtre analogique une atténuation de 40dB à $0.428/0.103=4.25$ fois la fréquence de coupure 0.103Hz.

K est donné par :

$$0.01 = \frac{1}{\sqrt{1 + 0.349^2 \cosh^2(K \operatorname{arccosh} 4.25)}}, \text{ d'où } K = 2.99.$$

Comme K est un entier, on choisit $K=3$.

La fonction de transfert du filtre de Tchebycheff analogique d'ordre 3 et $f_{ac}=1/2p$ avec une oscillation 0.5dB est donnée par les tableaux de référence :

$$H_a(p) = \frac{0.716}{p^3 + 1.253p^2 + 1.535p + 0.716}$$

Dans cette expression il faut remplacer p par $p \cdot \frac{1/(2p)}{f_{ac}}$ ($1/(2p)$ étant une fréquence de coupure normalisée), avec $f_{ac}=0.103\text{Hz}$.

La fonction de transfert de notre filtre analogique est finalement :

$$H_a(p) = \frac{0.196}{p^3 + 0.814p^2 + 0.648p + 0.196}$$

La fonction de transfert du filtre numérique s'obtient en remplaçant p par : $\frac{2}{T_e} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$.

$$H(z) = \frac{0.0154 + 0.0461z^{-1} + 0.0461z^{-2} + 0.0154z^{-3}}{1 - 1.9903z^{-1} + 1.5717z^{-2} - 0.458z^{-3}}$$

On effectue le filtrage numérique en passant aux équations aux différences.

3. Echantillonnage de la réponse impulsionnelle

Signalons en bref la dernière méthode de transposition analogique/numérique envisagée ici et qui consiste à échantillonner la réponse impulsionnelle analogique $h_a(t)$.

Cette méthode pose le problème de recouvrement à cause de la durée illimitée de $h_a(t)$ ce qui nécessite par la suite un fenêtrage temporel approprié.

V- SYSTEMES A PHASE MINIMUM

Le gabarit fixe la plupart du temps le module de la réponse fréquentielle $H(f)$. L'argument de $H(n)$ devant être choisi de manière à garantir la causalité et la stabilité du filtre linéaire recherché.

L'idéal serait de déduire la phase $\text{Arg}H(f)$ à partir du module de $H(f)$. Cela revient à caractériser les systèmes linéaires invariants dont l'argument de la réponse fréquentielle est une fonction de son module; c'est l'objet de ce paragraphe.

1. Transformation de Hilbert

Soit $h(k)$ la réponse impulsionnelle réelle d'un SNLI *causal et stable* de TF $H(f)$; on peut la décomposer en une partie paire et une partie impaire :

$$h(k) = h_p(k) + h_i(k) \quad (239.1)$$

$$h_p(k) = [h(k) + h(-k)]/2 \quad (239.2)$$

$$h_i(k) = [h(k) - h(-k)]/2 \quad (239.3)$$

Exercice : Démontrer que la TF de $h_p(k)$ est la partie réelle de $H(f)$ et celle de $h_i(k)$ est j fois la partie imaginaire de $H(f)$. On note $X(f) = \text{Re}[H(f)]$ et $Y(f) = \text{Im}[H(f)]$.

Lier $h_i(k)$ et $h_p(k)$ permet de lier $X(f)$ et $Y(f)$ et par la suite le module de $H(f)$ à son argument sous certaines conditions :

$$|H(f)|^2 = X(f)^2 + Y(f)^2 \quad (240.1)$$

$$\text{Arg}H(f) = \text{Atan}[Y(f)/X(f)] \quad (240.2)$$

$h(k)$ étant nulle pour les $k < 0$, pour *tout* k on peut écrire :

$$h_i(k) = h_p(k) \cdot \text{sign}(k) \quad (241.1)$$

$$h_p(k) = h_i(k) \cdot \text{sign}(k) + h(0) \delta(0) \quad (241.2)$$

Avec :

$$\text{sign}(k) = \frac{|k|}{k} \text{ et } \text{sign}(0) = 0 \quad (242)$$

Dont la TF $G(f)$ se calcule *indirectement* comme limite d'une famille simple de fonctions exponentielles décroissantes (comme exercice, prouver le):

$$G(f) = -j \cdot \cotan(f) \quad (243)$$

Remarque : $G(f)$ est discontinue au point zéro, comme $\text{sign}(k)$ d'ailleurs.

On en déduit :

$$X(f) = j \cdot \int Y(u) \cdot G(f-u) du + h(0) \quad (244.1)$$

$$Y(f) = -j \cdot \int X(u) \cdot G(f-u) du \quad (244.2)$$

Qui définissent la transformation de *Hilbert* de $h(t)$, en notant que les intégrales sont calculées en prenant les limites à droite et à gauche du point f (*valeur principale de Cauchy*).

Remarque : Noter la différence entre cette transformation et celle de Hilbert *analogique* (déphaseur pur de 90°) La transformée est la convolution du signal $h(t)$ et de la fonction $1/(j\pi t)$.

Considérons maintenant le logarithme complexe de $H(z)$ sans ambiguïté 2π sur son argument :

$$\text{Ln}[H(z)] = \text{Ln}|H(f)| + j \cdot \text{Arg}[H(f)] \quad (245)$$

Les pôles et les zéros de $H(z)$ sont des pôles de $\text{Ln}(H(z))$.

Pour pouvoir appliquer la transformation de Hilbert à $H'(z) = \text{Ln}[H(z)]$ il faut que cette fonction soit la TZ d'un signal *causal* $g'(k)$ dont les pôles sont par conséquent à l'intérieur de son cercle de convergence.

La *stabilité* de $G'(z)$ impose aux pôles et zéros de $H(z)$ d'être à l'intérieur du cercle unité. Sous ces conditions on peut écrire :

$$\text{Arg}[H(f)] = - \int X(u) \cdot \cot(f-u) du \quad (246)$$

2. Définition d'un système à phase minimum

Si les pôles et les zéros d'un système linéaire invariant se retrouvent à l'intérieur du cercle unité on dit que ce système est à phase minimum.

L'argument de sa réponse fréquentiel se déduit alors du module de celle-ci par la transformation de Hilbert.

Remarque : Cette définition peut s'étendre aux signaux en disant qu'un signal est à phase minimum si les zéros et pôles de sa TZ ont des modules inférieurs à l'unité.

Le retard de groupe d'un filtre

Le retard de groupe t_g d'un filtre est le retard moyen introduit par le filtre, c'est-à-dire la durée moyenne qui sépare l'apparition du premier échantillon en sortie et l'apparition du premier échantillon à l'entrée. Ainsi le filtre z^{-1} a un groupe delay égal à une seconde : C'est un retard pure. Il est défini par :

$$t_g = -\frac{dq(w)}{dw} \quad (247.1)$$

Avec : $q(w) = \text{angle}H(w)$.

Le retard de phase d'un filtre

On le définit par :

$$t_j = -\frac{q(w)}{w} \quad (247.2)$$

La nomination phase minimum peut se comprendre lorsqu'on compare deux systèmes $H_m(z)$ et $H(z)$ ayant la même réponse fréquentielle en module et deux arguments différents dont l'un, $H_m(z)$, étant à phase minimum et l'autre, $H(z)$, ayant des zéros à l'extérieur du cercle unité.

Posons :

$$H(z) = H_m(z) \cdot H_{pt}(z) \quad (247.3)$$

Où $H_{pt}(z)$ désigne la fonction de transfert d'un filtre *passé tout* qui admet un module égal à l'unité pour toutes les fréquences.

En déterminant le rôle de $H_{pt}(z)$ on pourra saisir la particularité du système à phase minimum $H_m(z)$.

On démontre sans difficultés particulières que le filtre *passé tout* a pour effet de transférer les zéros de $H_m(z)$ à l'extérieur du cercle unité.

Ce déplacement conduit à un *retard de phase* « *plus négatif* » que le retard de phase du système à phase minimum d'où la nomination phase minimum.

Généralement un système causal quelconque est la mise en série d'un système à phase minimum et d'un filtre *passé tout*.

Ch. XII : Une INTRODUCTION aux DSP

- I- INTRODUCTION
 - II- PRESENTATION
 - III- CLASSIFICATION
 - IV- ARCHITECTURES
 - V- DEVELOPPEMENTS
-

I- Introduction

Le traitement numérique du signal s'appuie sur plusieurs disciplines :

- L'électronique analogique et numérique
- Les microprocesseurs
- L'informatique
- Les mathématiques du signal

Les applications sont nombreuses et variées :

- Le traitement audio
- Le traitement des images
- La reconnaissance vocale
- La compression des données
- Les télécommunications
- L'automatisme
-

Chacune de ces applications nécessite un, voir plusieurs, DSP approprié ayant une puissance de calcul et un coût économique les plus optimisés possible.

A l'instar d'un microprocesseur, un DSP est mis en œuvre en lui associant de la mémoire (RAM, ROM) et des périphériques. Il a plutôt vocation à servir dans des systèmes autonomes.

Il se présente généralement sous la forme d'un microcontrôleur intégrant de la mémoire, des timers, des ports série synchrones rapides, des contrôleurs DMA...

Les systèmes à base de DSP se démarquent par :

- La souplesse de la programmation : On peut reprogrammer le DSP sans le changer.
- La stabilité : En analogique, les facteurs de température, tension d'alimentation...influencent sur le fonctionnement des composants. Ce problème n'existe pas pour un DSP.

II- Présentation d'un DSP

Utilisés initialement pour gérer la carte son des micro-ordinateurs, les DSP ont vu leur utilisation s'accroître considérablement depuis 1985 grâce aux contraintes de temps réel et de fiabilité de commande des processus.

1- Rôle du DSP

Le DSP est censé effectuer en un cycle d'horloge (entre 20 MHz et 200 MHz) l'opération de multiplication/addition sur des données numériques :

$$Z = X.Y + R$$

Le premier DSP a été produit en 1982 par Texas Instruments. Depuis cinq autres générations sont apparues. En 2004 les principaux fabricants de DSP sont : Texas Instruments, Analog Devices, Motorola, Zilog, Lucent, Nec, Zoran, Zsp, Microchip.

2- Approche signal

Les signaux à traiter sont caractérisés par une fréquence maximale qui doit être inférieure à la moitié de la fréquence d'échantillonnage, qui est généralement imposée par le convertisseur A/N.

Le nombre de cycles de calcul durant une période d'échantillonnage définit la capacité du DSP d'intervenir en temps réel entre les acquisitions de deux échantillons.

Origine du signal	F_{\max}	F_e	T_e	Nbre de cycles de calcul durant T_e (temps de cycle :50ns)
Vibrations	200 kHz	1 MHz	1 μ s	20
Commande à découpage (moteur, robot..)	5 kHz	20 kHz	50 μ s	1000
Parole	3.5 kHz	8 kHz	125 μ s	2500
Audio	20 kHz	48 kHz	20.8 μ s	417
Video	2.5 MHz	10 MHz	100 ns	2

3- Approche processeur

Le DSP peut être comparé au microcontrôleur et au microprocesseur. Ainsi, pour certains DSP, comme le TMS320F240x utilisé pour des commandes de moteurs électriques, le constructeur a optimisé les avantages du DSP et ceux du microcontrôleur.

Le DSP peut être associé à d'autres processeurs par l'intermédiaire du port hôte. Il peut servir en parallélisme à un microprocesseur.

Noyau DSP

Soit un processeur effectuant en un seul cycle d'horloge l'opération : $Z=X.Y+R$. Il s'agit par exemple d'effectuer une convolution $\sum x(n).y(n-k)$.

Il est alors nécessaire que le processeur possède deux mémoires vives au moins : une pour les données $x(n)$ et une pour les instructions dont provient $y(n)$ (le programme). Ces mémoires communiquent avec quatre bus internes au moins : deux bus d'adresse pour les deux mémoires, un bus pour les données et un bus pour le programme. Un système générateur d'adresses (le pointeur) active les mémoires en lecture ou en écriture. Le tout relève d'une architecture *Harvard*.

Ce noyau DSP est ensuite implanté soit dans un composant dédié soit dans un composant intégré.

III- Classification des DSP

Il est impossible d'effectuer une classification catégorique des DSP, tellement ils sont variés et disparates. Néanmoins, ils se distinguent par la représentation des données qu'ils manipulent, virgule fixe ou virgule flottante.

1- Les DSP à virgule flottante

Les données se composent d'une mantisse et d'un exposant $d = \text{mantisse} \cdot 2^{\text{exposant}}$. La mantisse est un nombre fractionnaire et l'exposant un entier indiquant la position de la virgule en base 2.

Ils sont plus souples et plus faciles à programmer, mais plus coûteux financièrement. Pour le TMS320C30, la mantisse occupe 24 bits et l'exposant 8 bits (la donnée est sur 32 bits en mémoire). Les registres de données intermédiaires utilisent 32 bits de mantisse et 8 bits d'exposant. La dynamique disponible va de -1.2^{-128} à $(1-2^{-23}).2^{127}$. Ils sont plutôt adaptés aux cas typiques où :

- Les coefficients varient dans le temps (filtres adaptatifs)
- Le signal et les coefficients ont besoin d'une grande dynamique.
- La structure mémoire est importante (imagerie)
- La précision est recherchée (Audio professionnel)

2- Les DSP à virgule fixe

Les données sont représentées comme des nombres fractionnaires à virgule fixe ou comme des entiers classiques (-1.0 à +1.0 par exemple). La méthode s'appuie sur le complément à deux.

MSB			LSB	Entiers	Fractionnaires	MSB			LSB
-2^3	2^2	2^1	2^0			-2^0	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}
-8	4	2	1			-1	0.5	0.25	0.125
0	1	0	1	+5	+0.625	0	1	0	1
1	1	0	1	-3	-0.375	1	1	0	1
0	0	0	1	+1	+0.125	0	0	0	1
0	1	1	1	+7	+0.875	0	1	1	1
1	1	1	1	-1	-0.125	1	1	1	1
1	0	0	0	-8	-1	0	0	0	0

Fig. 58 : Représentation des nombres codés sur 4 bits en complément à deux.

Dans un DSP classique comme le TMS320C25 les nombres sont codés sur 16 bits (fractions et entiers), mais les calculs s'effectuent avec des accumulateurs 32 bits. La précision est un point critique des DSP virgule fixe : Le programme doit utiliser au maximum une dynamique élevée pour éviter les arrondis.

3- Comparaisons entre DSP

Effectuons une comparaison des DSP fabriqués par TMS et ADSP :

NOM	Critère de choix	Données	Durée d'une instruction élémentaire (ns)	Durée du calcul FFT (µs)
ADSP2105	Faible coût	16 bits Fixe	100	3.46
TMS320C2x	Faible coût	16 bits Fixe	80	9.01
ADSP2101	Performance	16 bits Fixe	60	2.07
TMS3220C5x	Performance	16 bits Fixe	35	2.97
ADSP2199x	Performance	16 bits Fixe	6	0.4
ADSP21010	Faible coût	32 bits Flottante	80	1.54
TMS320C3x	Faible coût	32 bits Flottante	50	3.08
ADSP21020	Performance	32 bits Flottante	40	0.77
TMS320C4x	Performance	32 bits Flottante	40	1.55

Fig. 59 : comparaison entre divers DSP

Le temps d'exécution (Benchmark) n'étant pas un étalon sur, mais reste néanmoins un bon indicateur de la puissance de calcul d'un DSP :

ADSP219x	Nombre de cycles	Temps d'exécution à 160 MHz
FIR d'ordre 1	1	6.25 ns
IIR à 4 coefficients	5	31.2 ns
FFT complexe 1024 points	48320	302 μ s
Division	19	118.75 ns
Sin/Cos	11	68.75 ns
Arc tangente	13	81.25 ns
Ln/log10	11	68.75 ns

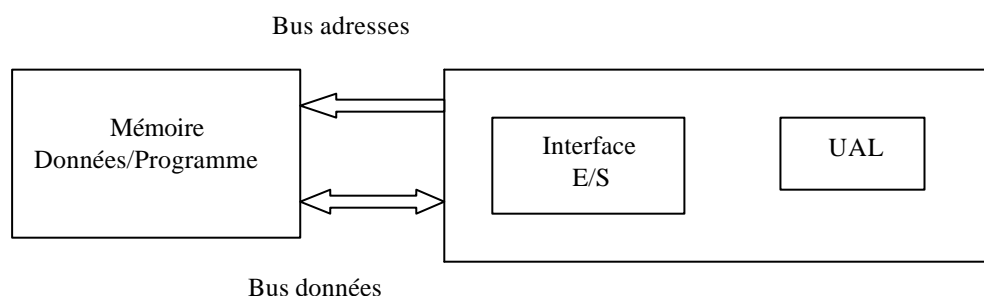
Fig. 60 : Tableau comparatif de Benchmark

IV- Architectures

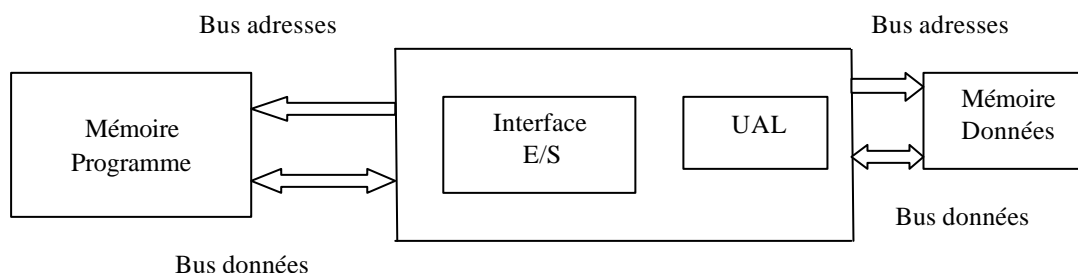
L'architecture est ce qui détermine d'emblé et de manière définitive les principales caractéristiques du processeur en particulier la vitesse d'exécution des instructions.

1. Architecture de Von Neumann et de Harvard

Dans l'architecture de Von Neumann le programme et les données sont enregistrés sur la même mémoire. Les microprocesseurs (Familles Motorola et Intel) et beaucoup de microcontrôleurs utilisent cette architecture pour sa souplesse de programmation.

**Fig. 61 : Architecture simple de Von Neumann**

Dans l'architecture dite de Harvard (car mise au point dans cette université en 1930), on sépare systématiquement la mémoire des données de celle du programme, l'adressage des deux mémoires étant indépendants. Elle est plutôt utilisée dans les microprocesseurs spécialisés temps réel, comme les DSP.

**Fig. 62 : Architecture simple de Harvard**

2- Les pipelines

Pour améliorer les performances du processeur, les DSP les plus récents utilisent la méthode du pipeline de manière à optimiser en rapidité l'exécution du flot des instructions.

Instruction	t	t+T	t+2T	t+3T	t+4T	t+5T	t+6T
n	Fetch	Decode	Read	Execute
n+1		Fetch	Decode	Read	Execute
n+2			Fetch	Decode	Read	Execute	...
n+3				Fetch	Decode	Read	Execute

Fig. 63 : Principe du pipeline

V- Développement

Le développement d'une application DSP nécessite deux études distinctes :

- **La partie matérielle** : La création d'une chaîne d'acquisition/restitution du signal à traiter et la mise en œuvre du DSP.
- **La partie logicielle** : Elle s'appuie sur des outils classiques adaptés aux spécificités des DSP. On a la possibilité de recommencer autant de fois pour arriver au résultat escompté.

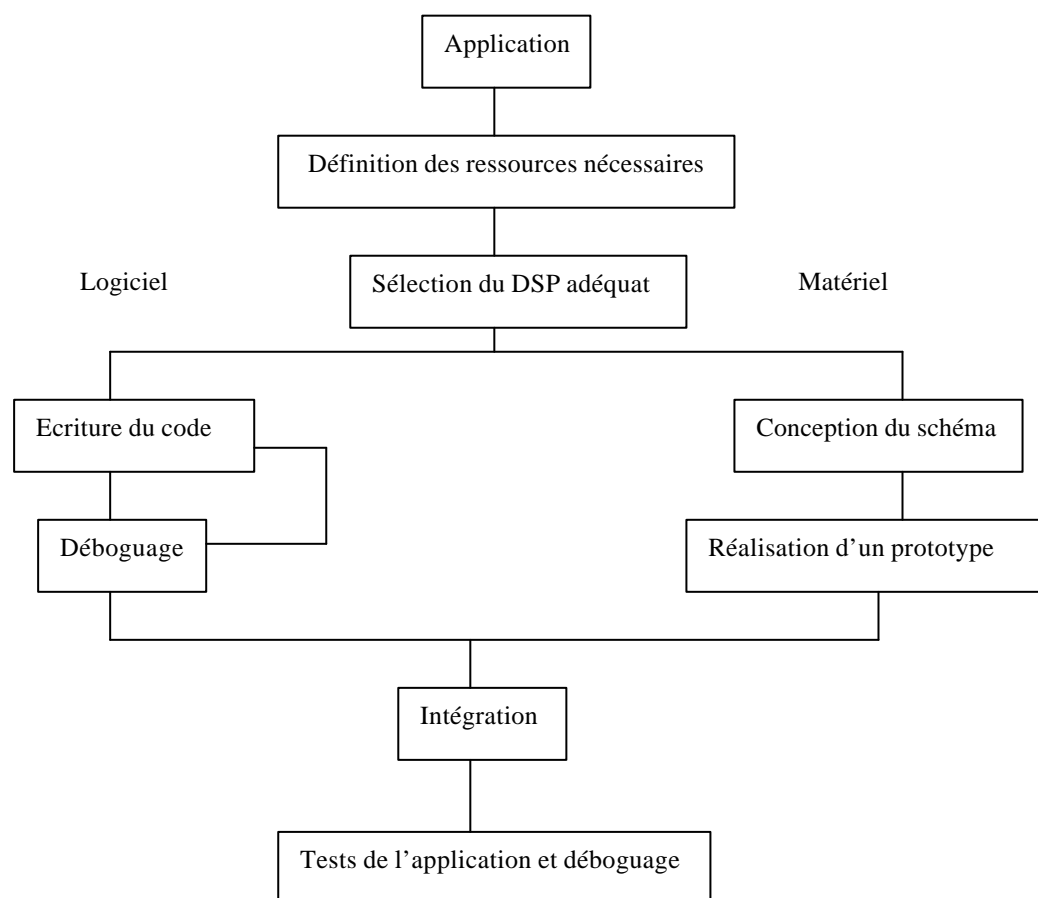


Fig. 64 : Exemple d'un processus typique de développement d'une application DSP

Les ressources nécessaires :

- La résolution (nombre de bits nécessaires pour quantifier le signal)
- La fréquence d'échantillonnage
- Le type de convertisseur utilisé (technologie)
- Les filtres anti-repliement s'ils ne sont pas intégrés dans le convertisseur
- ...

La sélection du DSP adapté :

- Virgule fixe ou flottante
- Possibilité d'utiliser un langage haut niveau (C par exemple)
- Présence d'un bon support technique

Le simulateur :

C'est un programme particulier exécuté par un PC ou une station de travail. Son rôle est de simuler le plus exactement possible le fonctionnement du DSP cible.

Le module d'évaluation :

Il se présente sous la forme d'une carte électronique incorporant le DSP cible et le minimum des ressources nécessaires à sa mise en œuvre. Le module est piloté par un logiciel adéquat exécuté par un PC.

Le programme à tester est téléchargé dans le module pour être exécuté par le DSP. Cependant l'émulateur temps réel reste le moyen le plus efficace, quoique coûteux, pour tester une application DSP.

FORMULAIRE

$$\sin(\mathbf{a}) = \mathbf{a} - \mathbf{a}^3 / 3! + \sum_{k=5}^{+\infty} (-1)^{(k-1)/2} \frac{\mathbf{a}^k}{k!}$$

$$\cos(\mathbf{a}) = 1 - \mathbf{a}^2 / 2! + \sum_{k=4}^{+\infty} (-1)^{k/2} \frac{\mathbf{a}^k}{k!}$$

$$e^{\mathbf{a}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathbf{a}^k}{k!}$$

$$e^{j\mathbf{a}} = \cos(\mathbf{a}) + j \sin(\mathbf{a})$$

$$\cos(\mathbf{a}) = \frac{e^{j\mathbf{a}} + e^{-j\mathbf{a}}}{2}$$

$$\sin(\mathbf{a}) = \frac{e^{j\mathbf{a}} - e^{-j\mathbf{a}}}{2j}$$

$$\sin(\mathbf{a}) \sin(\mathbf{b}) = \frac{1}{2} \cos(\mathbf{a} - \mathbf{b}) - \frac{1}{2} \cos(\mathbf{a} + \mathbf{b})$$

$$\cos(\mathbf{a}) \cos(\mathbf{b}) = \frac{1}{2} \cos(\mathbf{a} - \mathbf{b}) + \frac{1}{2} \cos(\mathbf{a} + \mathbf{b})$$

$$\sin(\mathbf{a}) \cos(\mathbf{b}) = \frac{1}{2} \sin(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \frac{1}{2} \sin(\mathbf{a} - \mathbf{b})$$

$$\sin(\mathbf{a}) + \sin(\mathbf{b}) = 2 \sin[(\mathbf{a} + \mathbf{b}) / 2] \cos[(\mathbf{a} - \mathbf{b}) / 2]$$

$$\sin(\mathbf{a}) - \sin(\mathbf{b}) = 2 \cos[(\mathbf{a} + \mathbf{b}) / 2] \sin[(\mathbf{a} - \mathbf{b}) / 2]$$

$$\cos(\mathbf{a}) + \cos(\mathbf{b}) = 2 \cos[(\mathbf{a} + \mathbf{b}) / 2] \cos[(\mathbf{a} - \mathbf{b}) / 2]$$

$$\cos(\mathbf{a}) - \cos(\mathbf{b}) = -2 \sin[(\mathbf{a} + \mathbf{b}) / 2] \sin[(\mathbf{a} - \mathbf{b}) / 2]$$

$$\sin(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \sin(\mathbf{a}) \cos(\mathbf{b}) + \cos(\mathbf{a}) \sin(\mathbf{b})$$

$$\sin(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \sin(\mathbf{a}) \cos(\mathbf{b}) - \cos(\mathbf{a}) \sin(\mathbf{b})$$

$$\cos(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \cos(\mathbf{a}) \cos(\mathbf{b}) - \sin(\mathbf{a}) \sin(\mathbf{b})$$

$$\cos(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \cos(\mathbf{a}) \cos(\mathbf{b}) + \sin(\mathbf{a}) \sin(\mathbf{b})$$

$$\tan(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \frac{\tan(\mathbf{a}) + \tan(\mathbf{b})}{1 - \tan(\mathbf{a}) \cdot \tan(\mathbf{b})}$$

$$\sin^2 u = \frac{1 - \cos(2u)}{2}$$

$$\cos^2 u = \frac{1 + \cos(2u)}{2}$$

$$\tan^2 u = \frac{1 - \cos(2u)}{1 + \cos(2u)}$$

$$\sin(2u) = 2 \sin u \cos u$$

$$\cos(2u) = \cos^2 u - \sin^2 u$$

$$= 2 \cos^2 u - 1$$

$$= 1 - 2 \sin^2 u$$

$$\tan(2u) = \frac{2 \tan u}{1 - \tan^2 u}$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1]** C. GASQUET/P. WITOSKI-« Analyse de Fourier et applications », Masson, 1995
- [2]** F. De COULON-« Théorie et traitement des signaux » Dunod, 1984
- [3]** M. KUNT-« Traitement numérique des signaux » Dunod, 1984
- [4]** BELLANGER M.-« Traitement numérique du signal » Masson, 1981
- [5]** BINET G. « Introduction au filtrage adaptatif »
- [6]** KADIONIK P. « Bases de transmissions numériques : Les modulations numériques », 2000.
- [7]** ESNARD A. « Traitement du signal »
- [8]** JOINDOT M. « Communications numériques », 1987
- [9]** GLAVIEUX A./JOINDOT M. « Communications numériques », Masson, 1996
- [10]** AUVRAY J. « Traitement du signal », 2002.
- [11]** ETIEMBLE D. « Les processeurs de traitement du signal », 2004
- [12]** MONTANET F. « Cours DSP », 2000
- [13]** VEZZOZI J. « Cours de traitement du signal » 1987
- [14]** HERVE J. « Les modulations numériques », Masson, 1998
- [15]** HERVE J. « Electronique et transmission de l'information », Masson, 1987
- [16]** Roubine E. « Introduction à la théorie de la communication, Masson 3 tomes Signaux certains, Signaux aléatoires, Théorie de l'information
- [17]** PICINBONO « Introduction à la théorie du signal », Dunod
- [18]** MAX J. « Méthodes et techniques du traitement de signal », Masson
- [19]** ROUBINE E. « Distributions et Signal », Eyrolles
- [20]** LIFERMAN « Méthodes rapides de transformation du signal », Masson
- [21]** DELMAS JP. « Eléments de théorie du signal, Signaux certains »
- [22]** CHARBIT M.& VENTRE D. « Signaux aléatoires et Communications analogiques », Ellipse
- [23]** SPATARU « Théorie de la transmission de l'information », Masson 1973

- [24]** BENIDIR M. « Théorie et traitement du signal », Dunod 2002
- [25]** GHORBANZADEH&Co « Eléments de mathématiques du signal »Dunod 2002
- [26]** PETIT R. « L’outil mathématique », Masson 1983
- [27]** de BRUCQ D. & FOLLIOT G. « Théorie du signal », Masson 1988
- [28]** CORREVON M. « Introduction aux DSP orientés applications industrielles »
- [29]** ADSP-2100 Family “User’s manual” Third Edition(9/95)
- [28]** ADSP-2100 Family “Assembler tools& Simulator manual” Second Edition (11/94)