

Organisation

Supports de cours: transparents - tableau



Accès via Internet aux transparents, complétés par des liens hypertextes vers des pages WWW



Travaux dirigés (M. Argence)



Présentation multimédia (1 séance)

Références:

- I) *“Théorie et traitement des signaux”*, F. de Coulon, Eds. Dunod
- II) *“An introduction to the analysis and processing of signals”*, P.A. Lynn, Ed. Macmillan
- III) *“Méthodes et Techniques de traitement du signal et applications aux mesures physiques”*, tome 1, J. Max, Ed. Masson
- IV) *“Traitement numérique des signaux ”*, M.Kunt, Eds. Dunod



DSP a multimedia approach; Life in the frequency domain;
Digital Signal Processing;

Traitement du Signal

Objectifs du cours :

✉ Enseigner les *concepts* et *méthodes de bases* en TS pour la *Physique*

distributions spectrales,
convolution et
corrélation des signaux,
signaux numériques,
signaux aléatoires
...

systemes linéaires et invariants,
échantillonnage,
modulation,
estimation et détection,
analyse spectrale,
détection synchrone,
filtrage,
...

spectroscopie,
interférométrie,
diffraction,
modélisation,
....

Plan du cours:

I CONCEPTS

- I.1 [Introduction](#)
- I.2 [Transformations des signaux](#)
- I.3 [Fonctions de corrélation et densités spectrales](#)
- I.4 [Impulsion de Dirac](#)
- I.5 [Signaux numériques](#)
- I.6 [Signaux aléatoires](#)

II METHODES

- II.1 [Systèmes linéaires et invariants](#)
- II.2 [Détection et Estimation des signaux](#)
- II.3 [Modulation et détection synchrone](#)
- II.4 [Analyse spectrale](#)
- II.5 [Filtrage des signaux](#)

A) Que signifient *signal* et *traitement du signal* ?

signal = toute entité qui *véhicule* une *information*

Exemples:

onde acoustique
courant électrique délivré
par un microphone

Musique,
parole,
...

onde lumineuse
courant électrique délivré
par un spectromètre

source lumineuse
(étoile, gaz, ...)
...

suite de nombres

Mesures physiques

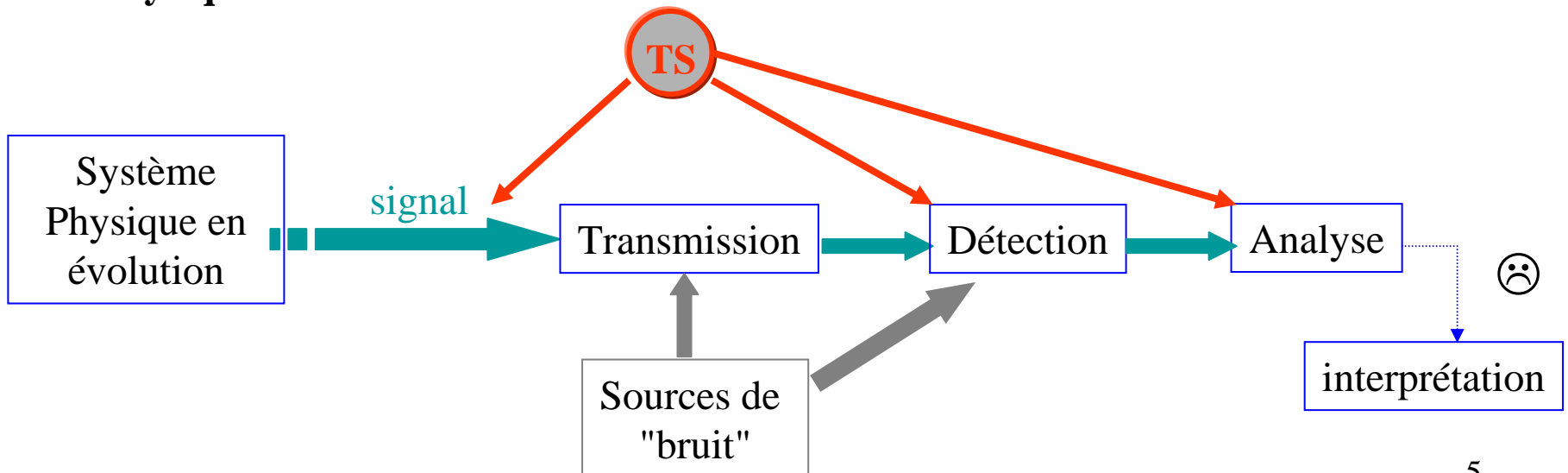
Photographie

...

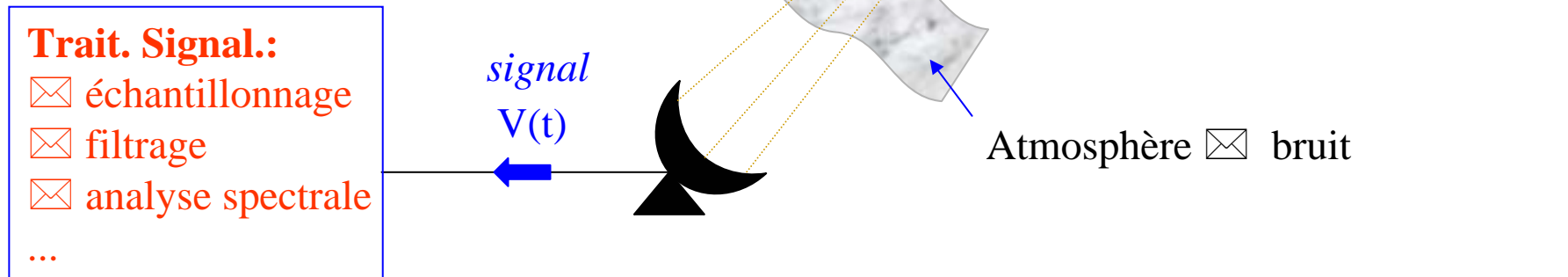
Traitement du signal = procédure pour:

- ✉ extraire l'information (filtrage, détection, estimation, analyse spectrale...)
- ✉ mettre en forme le signal (modulation, échantillonnage....)
(forme adaptée à la transmission ou au stockage)
- ✉ reconnaissance des formes
- • •

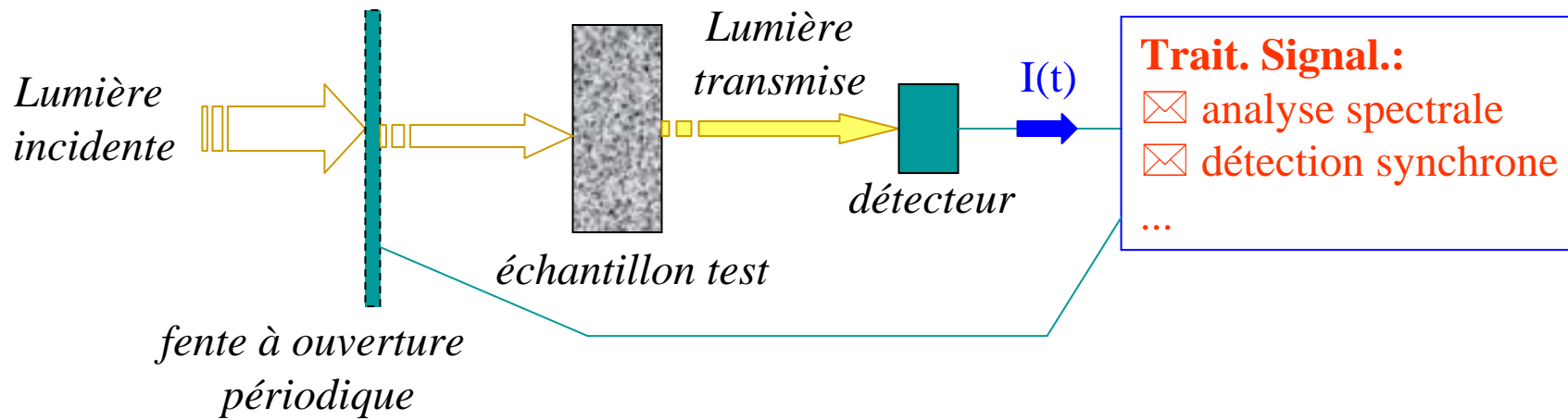
En Physique:



Exemples: Astronomie:



Physique du solide:



B) Classification des signaux :

Classification dimensionnelle : \longleftrightarrow Nombre de variables libres.

Exemples : Tension électrique $V(t)$ = signal *unidimensionnel*

Image statique noir et blanc \Leftrightarrow brillance $B(x,y)$ = signal *bi-dimensionnel*

Film noir et blanc $\Leftrightarrow B(x,y,t)$ = signal *tri-dimensionnel*

...

☒ La théorie du signal est *indépendante* de la *nature physique* du signal et des variables libres

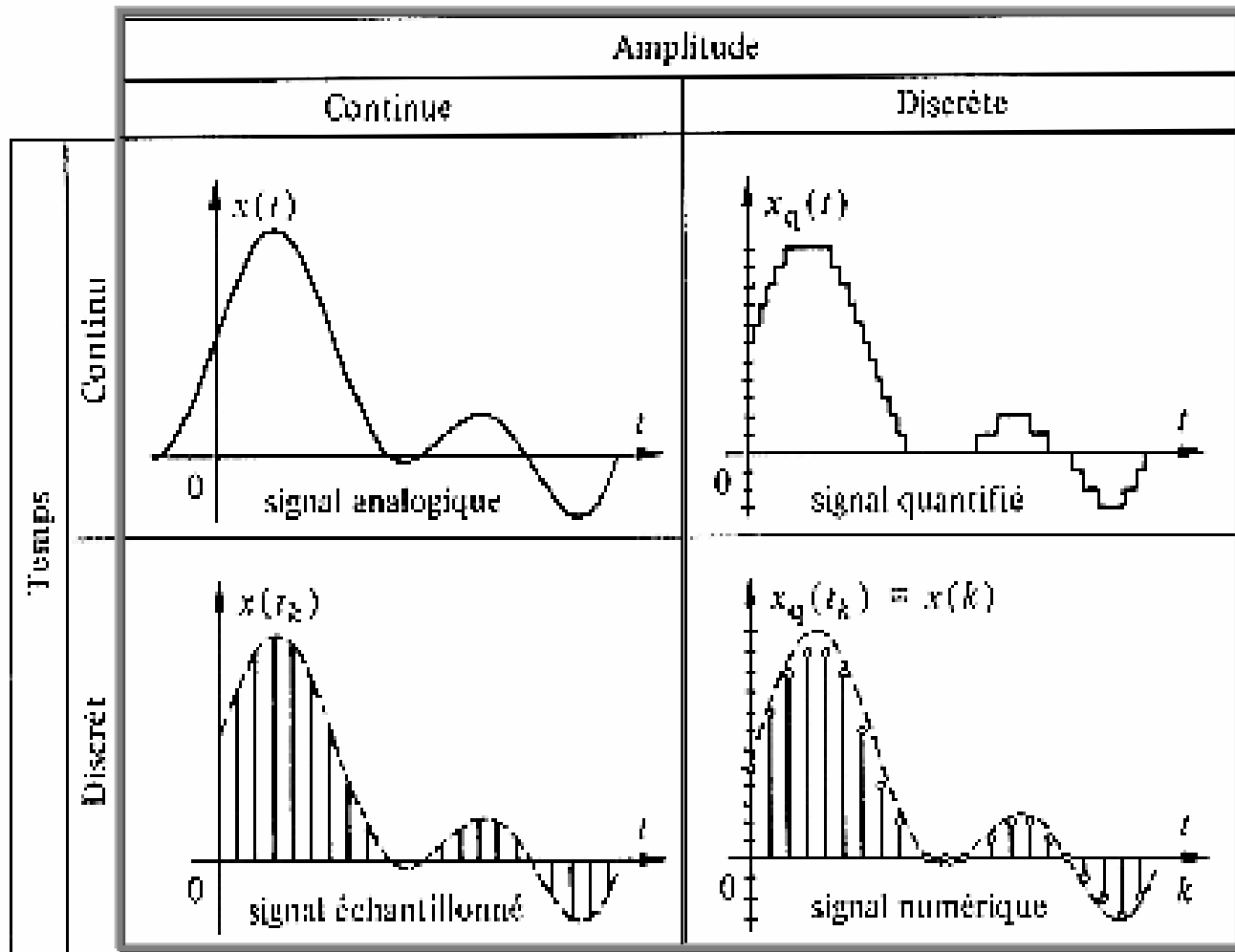
Classification phénoménologique : \longleftrightarrow Évolution *déterministe* ou *aléatoire* du signal

Signal déterministe : évolution ‘temporelle’ peut être parfaitement prédite par un modèle mathématique approprié

Signal aléatoire : comportement *imprévisible* \Rightarrow description *statistique*

☒ tout signal physique comporte une *composante* aléatoire
(perturbation externe, phénomène quantique ...)

Classification morphologique:



[Fig.2.10,(I)]

Classification énergétique:

Définition: par analogie avec les signaux électriques

$$\text{Energie d'un signal } x(t) : W_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

$$\text{Puissance moyenne de } x(t) : P_x = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$$

⇒ Classification: signaux à *énergie finie* \Leftrightarrow à *Puissance moyenne finie*

↙
Tout signal *physique*

↘
Idéalisation
exemple: signal sinusoïdal

I.2 Transformations des signaux :

(ou Représentation vectorielle des signaux)

Hypothèse: signal *uni-dimensionnel et analogique*

A) Série de Fourier : $x_T(t)$ signal *périodique*, avec T = période

Rappel:

$$x_T(t) = a_o + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2\pi n f_o t) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(2\pi n f_o t)$$

avec
$$a_o = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_T(t) dt = \bar{x}_T \text{ ("composante continue")}$$

“Coefficients
de Fourier”

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_T(t) \cos(2\pi n f_o t) dt \text{ et } b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_T(t) \sin(2\pi n f_o t) dt$$



Superposition de signaux sinusoidaux de fréquences $n f_o$,
 n entier et $f_o = 1/T$

Terme de fréquence f_o = le "fondamental"

Terme de fréquence $n f_o$ = $n^{\text{ième}}$ "harmonique"

En notation complexe :

$$x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp(i \cdot 2\pi n f_o t)$$

avec
$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_T(t) \exp(-i \cdot 2\pi n f_o t) dt$$

$$c_o = a_o, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$$

Cas particuliers: $x_T(t)$ réel $\rightarrow a_n, b_n \in \Re \Rightarrow c_{-n} = c_n^*$

$x_T(t)$ pair $\rightarrow b_n = 0 \quad \forall n \Rightarrow c_{-n} = c_n$

$x_T(t)$ impair $\rightarrow a_n = 0 \quad \forall n \Rightarrow c_{-n} = -c_n$

✉ Notation complexe \Rightarrow introduction de fréquences “*négatives*”

✉ Représentation graphique: $Re(c_n), Im(c_n)$ ou $|c_n|, Arg(c_n)$

✉ centre de symétrie en $t=T/4$: symétrie *demi-onde* \Rightarrow *absence d’harmoniques paires*

✉ si t = temps (s) $\Rightarrow f$ = fréquence (Hz); si t = distance(m) $\Rightarrow f$ = fréquence spatiale (m^{-1}) etc



✉ Fourier Synthesis : [Site 1](#) ou [Site 2](#)

✉ [Fourier Series Approximation](#)

✉ [Sinusoids](#)

✉ [Listen to Fourier Series](#)

B) Transformée de Fourier :

$x(t)$ = signal quelconque

Définition :

$$F\{x(t)\} = X(f) \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-i \cdot 2\pi f t) dt = \text{"Transformée de Fourier" de } x(t)$$

et

$$x(t) = F^{-1}\{X(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \exp(i \cdot 2\pi f t) df = \text{"Transformée de Fourier inverse"}$$

✉ Notation: $x(t) \leftrightarrow X(f)$;

✉ $|X(f)|$ = “spectre d’amplitude” et $\text{Arg}[X(f)]$ = “spectre de phase” du signal

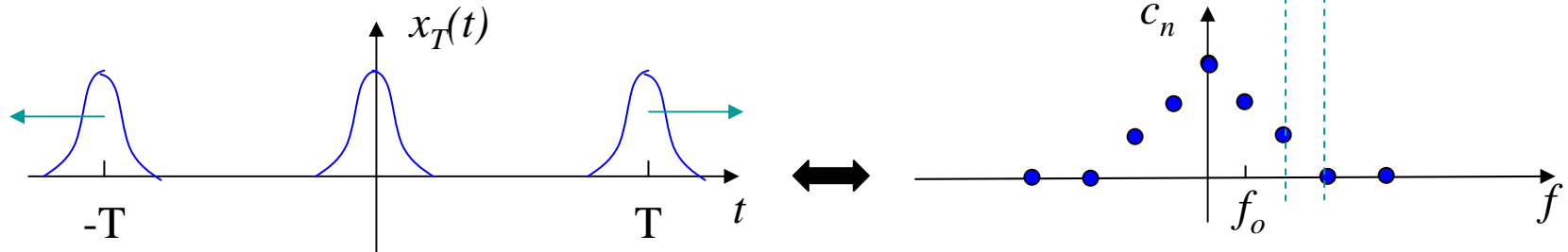
✉ $X(f)$ = fonction *complexe* même si $x(t)$ est réel

✉ $X(f)$ = fonction réel $\Leftrightarrow x(t)$ est *paire*; fonction imaginaire pure $\Leftrightarrow x(t)$ est *impaire*



Lien avec la série de Fourier :

$x_T(t)$ signal périodique *pair* (pour simplifier)



Lorsque $T \rightarrow +\infty$:

$x_T(t) \rightarrow$ fonction *non-périodique* $x(t)$
 $f_o = 1/T \rightarrow df$ intervalle *infinitésimal*
 $nf_o \rightarrow f$ variable réelle continue



$$\lim_{T \rightarrow +\infty} (c_n T) = \dots = X(f)$$

et

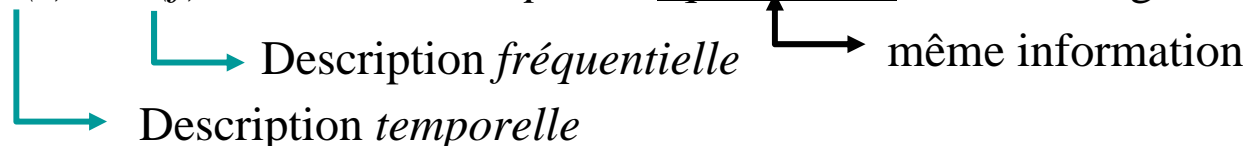
$$x(t) = \dots = F^{-1}\{X(f)\}$$

⊠ $X(f)$ = “généralisation” de la série de Fourier aux fonctions non-périodiques

⊠ $|X(f)| df$ = amplitude de la composante sinusoïdale de fréquence $\in [f, f+df]$

⊠ $\text{Arg}[X(f)]$ = phase ...

⊠ $x(t)$ et $X(f)$ sont *deux descriptions équivalentes* du même signal



⊠ $X(f)$ ⊃ information sur le système physique à l'origine du signal

Exemples : ↓ $X_{\text{son}}(f) \neq X_{\text{son}}(f)$
trompette trombone

↓ Spectre d'émission d'un gaz ⊠ température et composition chimique du gaz

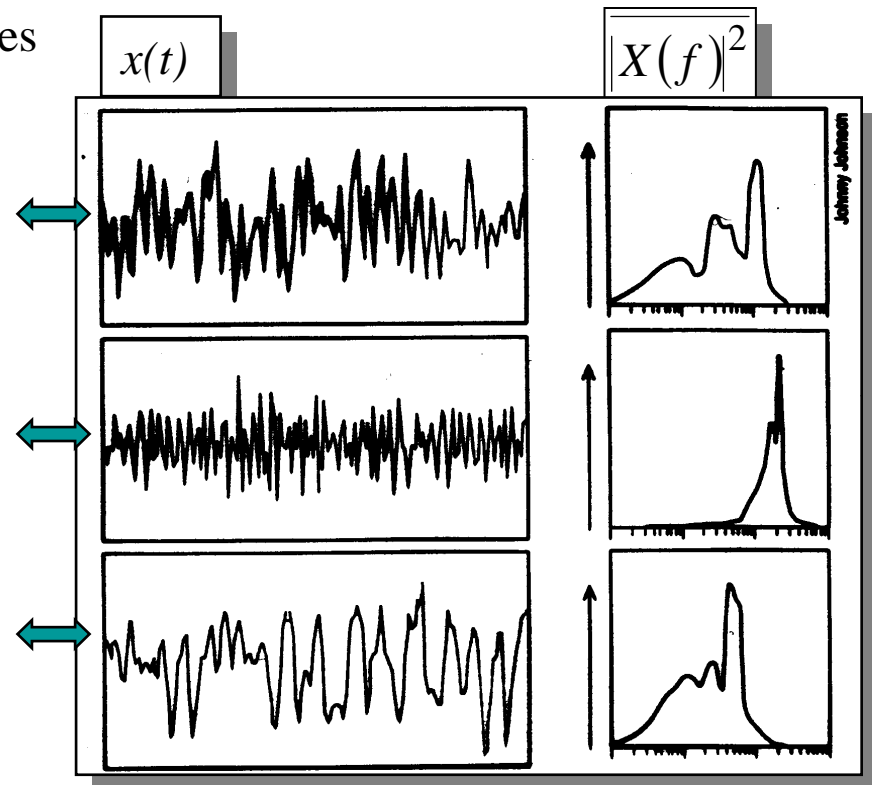
(ex: $x(t)$ signal délivré par un interféromètre, cf. chap II.3)

↓ Quelques ondes cérébrales

Ondes Alpha: engendrées lorsque le sujet change son niveau d'attention (f modérées, amplitude importante)

Ondes Bêta: produites par une activité mentale intense (fréq. élevées, faibles amplitude)

Ondes Thêta: accompagnent des sentiments de stress émotionnel (f faibles)



Propriétés de la transformée de Fourier :

critère d'existence:

Signaux à énergie finie = condition suffisante

Signaux à puissance moyenne finie => T.F. existe au sens des distributions

dualité temps fréquence: $x(t) \leftrightarrow X(f)$ et $X(-f) \leftrightarrow x(t)$

autres propriétés:

$$a x(t) + b y(t) \leftrightarrow a X(f) + b Y(f)$$

Linéarité

$$x(t) \cdot y(t) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} X(f') Y(f - f') df' \stackrel{\text{déf}}{=} [X * Y](f) = [Y * X](f)$$

Modulation

$$x(t) * y(t) \leftrightarrow X(f) Y(f)$$

Produit de convolution

$$x(t - t_0) \leftrightarrow X(f) e^{-i2\pi f t_0}$$

Retard

$$x(t) \cdot e^{i2\pi f_0 t} \leftrightarrow X(f - f_0)$$

Modulation sinusoidale

$$x(at) \leftrightarrow X\left(\frac{f}{a}\right) \frac{1}{|a|}$$

Changement d'échelle

$$\Rightarrow \Delta g \cdot \Delta G \geq 1$$



C) Transformée de Laplace: (aperçu)

Définition :

$$L\{x(t)\} = X_L(s) = \int_0^{+\infty} x(t) \exp(-s \cdot t) dt, \text{ avec } s = \sigma + i\omega \text{ et } \sigma, \omega \in \mathbb{R}$$

- ✉ $X_L(s)$ = fonction complexe de la variable complexe s
- ✉ *domaine de convergence* $\subset \mathbb{C}$
- ✉ Pour un signal *causal* ($x(t < 0) = 0$): $X_L(i2\pi f) = X(f)$
- ✉ $X_L \approx$ généralisation de la T.F. dans le plan complexe
- ✉ X_L = outil de caractérisation des systèmes de traitement des signaux (cf. [chap II.1](#))

Transformée inverse :

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} X_L(s) \exp(s \cdot t) ds$$

✉ méthode des résidus

✉ table de transformées de Laplace


✉ méthode des fractions partielles

Autres propriétés de la transformée de Laplace:

linéarité: $L\{a \cdot x(t) + b \cdot y(t)\} = a \cdot X_L(s) + b \cdot Y_L(s)$

décalage temporel: $L\{x(t - t_o)\} = X_L(s) \cdot e^{-st_o}$

décalage 'fréquentiel': $L\{x(t) \cdot e^{-at}\} = X_L(s + a)$

dérivation : $L\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = s \cdot X_L(s) - x(0)$  signal à t=0

dérivation multiple : $L\left\{\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right\} = s^n \cdot X_L(s) - s^{n-1} \cdot x(0) - s^{n-2} \cdot \frac{df(0)}{dt} - \dots - \frac{df^{n-1}(0)}{dt^{n-1}}$

intégration : $L\left\{\int_0^t x(t')dt'\right\} = \frac{X_L(s)}{s}$

Pôles et Zéros d'une Transformée de Laplace rationnelle:

$$\hookrightarrow X_L(s) = A \frac{(s - z_1)(s - z_2)(s - z_2) \cdots}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3) \cdots}$$

$$X_L(z_i) = 0 \Rightarrow z_i = \text{“zéros” de } X_L$$

$$p_i \notin \text{Dom. Convergence} \Rightarrow p_i = \text{“pôles” de } X_L$$

Estimation de la forme de $X(f)$ à partir des points singuliers (z_i et p_i):

$$\text{Hyp: signal causal} \quad \longrightarrow \quad X(f) = X_L(i2\pi f) = A \frac{\cdots (i2\pi f - z_i) \cdots}{\cdots (i2\pi f - p_i) \cdots}$$

$$\text{et} \quad |X(f)| = A \frac{\cdots |i2\pi f - z_i| \cdots}{\cdots |i2\pi f - p_i| \cdots}$$



Représentation vectorielle:

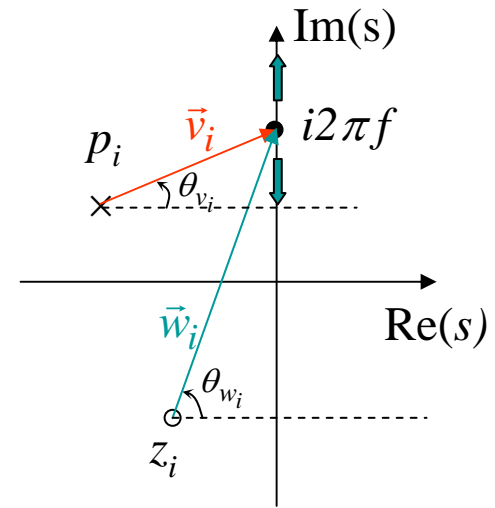
$$\|\vec{v}_i(f)\| = |i2\pi f - p_i|; \quad \theta_{v_i}(f) = \text{Arg}[i2\pi f - p_i]$$

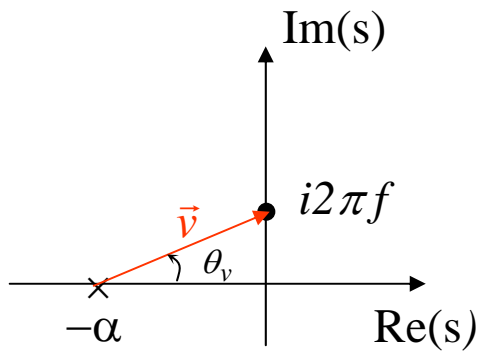
$$\|\vec{w}_i(f)\| = |i2\pi f - z_i|; \quad \theta_{w_i}(f) = \text{Arg}[i2\pi f - z_i]$$

$$|X(f)| = \frac{\cdots \|\vec{w}_i\| \cdots}{\|\vec{v}_i\|} \quad \text{et} \quad \text{Arg}[X(f)] = \sum_i \theta_{w_i}(f) - \sum_i \theta_{v_i}(f)$$

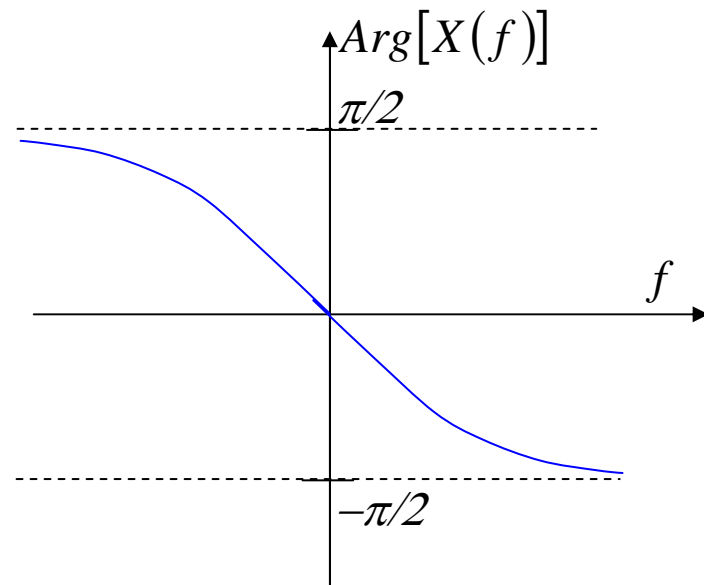
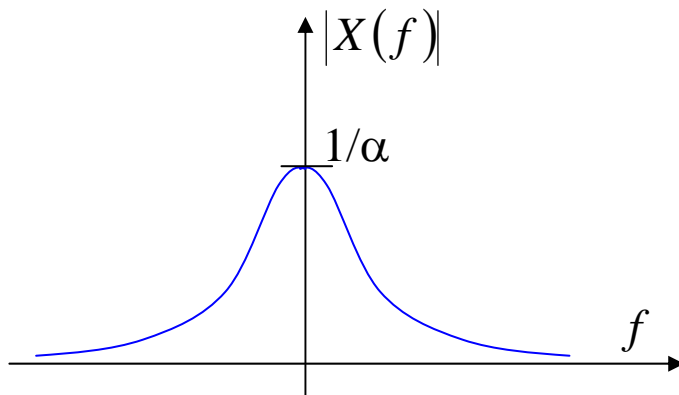
Exemple: $x(t) = \varepsilon(t)e^{-\alpha t}, \alpha \in \mathfrak{R}^+$ et $\varepsilon(t) = \begin{cases} 1 \text{ pour } t \geq 0 \\ 0 \text{ pour } t < 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow X_L(s) = \frac{1}{s + \alpha}$$





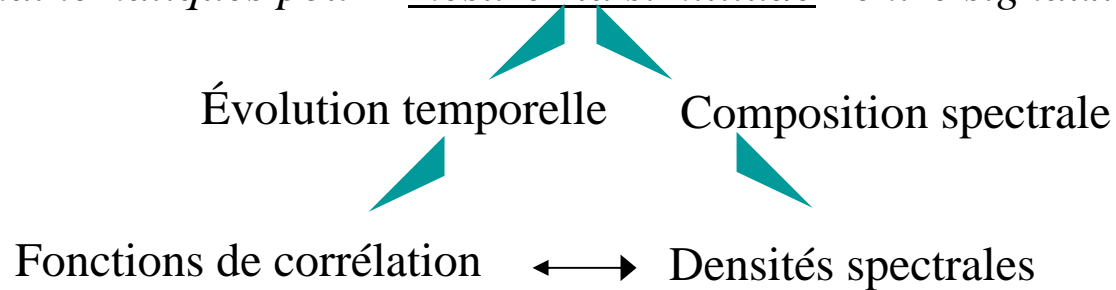
$$|X(f)| = \frac{1}{\|\vec{v}\|}; \quad \text{Arg}[X(f)] = -\theta_v(f)$$



- ✉ un pôle proche de l'axe imaginaire **tend** à augmenter $|X(f)|$ aux alentours de $f = \text{Im}(p_i)/2\pi$
- ✉ un zéro proche de l'axe imaginaire **tend** à diminuer $|X(f)|$ aux alentours de $f = \text{Im}(z_i)/2\pi$
- ✉ dans des cas simples (nombre réduit de points singuliers) cette méthode permet de rapidement tracer une **esquisse** de $|X(f)|$
- ✉ dans des cas plus complexes elle peut servir de base pour automatiser, par voie informatique, le tracé de $|X(f)|$ et $\text{Arg}[X(f)]$
- ✉ pour tout signal physique: **nombre de pôles** > **nombre de zéros**
- ✉ pour un signal **réel**: les points singuliers apparaissent par **paires** de complexes conjugués

I.3 Fonctions de corrélation et densités spectrales :

✉ Outils mathématiques pour “mesurer la similitude” entre signaux



✉ *Distribution énergétique du signal sur l'espace des fréquences*

A) Fonction d'intercorrélation

Définition

$$\varphi_{xy}^{\circ}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{*}(t)y(t+\tau)dt$$

“Fonction d'intercorrélation des signaux $x(t)$ et $y(t)$ ”

✉ convergence: au moins un des deux signaux doit être à *énergie finie*.

Interprétation: dans l'hypothèse où $x(t)$ et $y(t)$ sont à *valeur moyenne nulle*
Deux cas extrêmes: a) pas de corrélation entre x et y

$$\text{b) } y(t-t_o)=c x(t)$$

(a) \Leftrightarrow le *signe* de $x(t) \cdot y(t+\tau)$ est en moyenne *autant positif que négatif*

$$\rightarrow \varphi_{xy}^{\circ}(\tau) \propto \overline{x(t)y(t+\tau)} \approx 0$$

Valeur moyenne 'temporelle'

(b) \Leftrightarrow lorsque $\tau = t_o$ le *signe* de $x(t) \cdot y(t+\tau)$ est *toujours positif*

$$\rightarrow \varphi_{xy}^{\circ}(t_o) = c W_x = \text{maximal} \quad \searrow$$


Similitude max. lorsque $y(t)$ est décalé de t_o

✉ En termes mathématiques: $\varphi_{xy}^{\circ}(\tau) = \underline{\text{produit scalaire}}$ de $x(t)$ et $y(t)$

 *Projection* de $x(t)$ sur $y(t)$

B) Densité interspectrale d'énergie

On a:
$$\phi_{xy}^{\circ}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{*}(-t)y(-t + \tau)dt \stackrel{!}{=} [x^{*}(-t) * y(t)](\tau)$$


$$F\{\phi_{xy}^{\circ}(\tau)\} = X(f)^{*} \cdot Y(f) \stackrel{\text{déf.}}{=} \phi_{xy}^{\circ}(f)$$
 “Densité interspectrale d'énergie”

Conséquence:

$$\phi_{xy}^{\circ}(f) \neq 0 \Leftrightarrow X(f) \neq 0 \text{ et } Y(f) \neq 0 \longleftrightarrow \phi_{xy}^{\circ}(\tau) \text{ ne comporte que des fréquences } \textit{partagées} \text{ par } x(t) \text{ et } y(t)$$

(il suffit que $X(f)$ ou $Y(f)$ soit nulle en $f=f_o$ pour que $\phi_{xy}^{\circ}(f_o) = 0$)

C) Fonction d'autocorrélation :

Cas particulier: $y(t)=x(t)$

$$\varphi_x^\circ(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)x(t+\tau)dt$$

“Fonction
d'autocorrélation de $x(t)$ ”

✉ Mesure la similitude de $x(t)$ avec une version décalée de $x(t)$

ex: signal *périodique* $\rightarrow \varphi_x^\circ$ périodique de même période



maximum de ressemblance dès que

$\tau = \text{multiple de la période}$

Propriétés

✉ $x(t)$ nécessairement à W_x finie


✉
$$\varphi_x^\circ(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = W_x$$

✉ $\varphi_x^\circ(-\tau) = \varphi_x^\circ(\tau)^*$ $\rightarrow \varphi_x^\circ(\tau)$ *paire* si $x(t)$ est réel

D) Densité spectrale d'énergie

$$F\{\phi_x^\circ(\tau)\} = |X(f)|^2 \stackrel{\text{déf.}}{=} \phi_x^\circ(f)$$

“Densité spectrale
d'énergie”

Propriétés :  Par transformée inverse: $\phi_x^\circ(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 e^{-i2\pi f\tau} df$

➡ $\phi_x^\circ(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df \stackrel{!}{=} W_x \Rightarrow \phi_x^\circ$ mérite bien son nom!

$\phi_x^\circ(f)$ décrit la *distribution fréquentielle* de l'énergie du signal

 $\phi_x^\circ(f)$ est *indépendant* de la *phase* du signal ($\text{Arg}[X(f)]$)

➡ insensible à tout *retard* du signal

E) Cas des signaux à puissances moyenne finie :

☹ $\phi_{xy}^{\circ}(\tau)$ ne convergent pas \rightarrow nécessite des définitions différentes

Fonction d'intercorrélation:
$$\phi_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^*(t) y(t + \tau) dt$$

Fonction d'autocorrélation:
$$\phi_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^*(t) x(t + \tau) dt$$

Densité spectrale de puissance:
$$\phi_x(f) = F\{\phi_x(\tau)\}$$

✉ $\dots \rightarrow \phi_x(0) = P_x$

✉ on peut montrer que:
$$\phi_x(f) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} |X(f, T)|^2 \quad \text{où } X(f, T) \leftrightarrow x(t, T) = x(t) \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

(Coulon)

I.4 Impulsion de Dirac (en théorie du signal): $\delta(t)$

A) Définition

Par définition $\delta(t)$ est un “signal” pour lequel on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) x(t + t_o) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \delta(t - t_o) dt \stackrel{\text{déf}}{=} x(t_o)$$

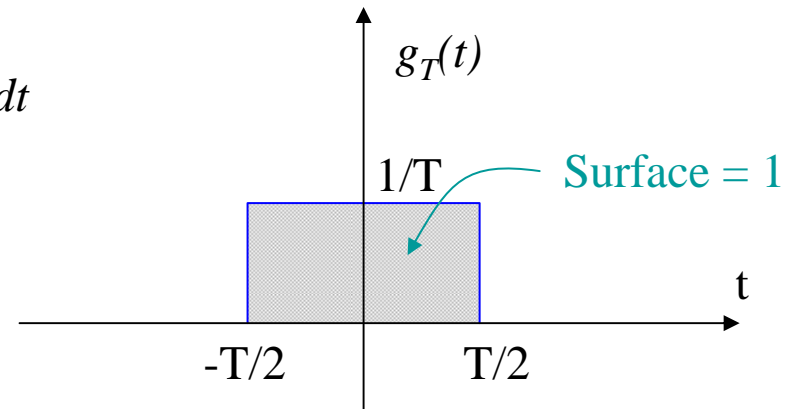
quelque soit $x(t)$.

☒ $\delta(t)$ = “opérateur
d’échantillonnage”

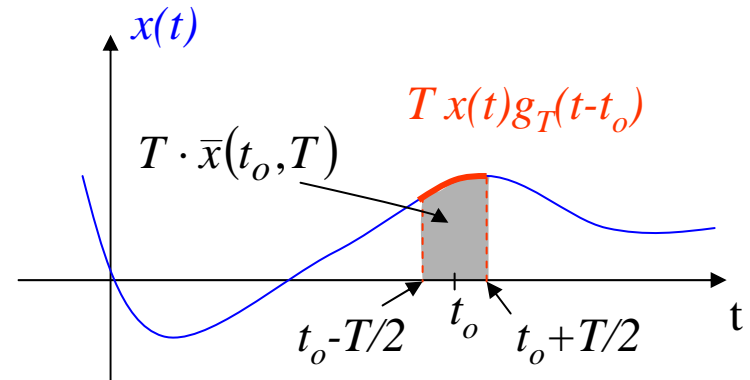
“Construction” de $\delta(t)$: Soit $\bar{x}(t_o, T) =$ Valeur moyenne de $x(t)$ sur $[t_o - T/2, t_o + T/2]$

$$\Rightarrow \bar{x}(t_o, T) = \frac{1}{T} \int_{t_o - T/2}^{t_o + T/2} x(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) g_T(t - t_o) dt$$

où $g_T(t) = \frac{1}{T} \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$



$$\lim_{T \rightarrow 0} \bar{x}(t_o, T) = x(t_o) \stackrel{!}{=} \text{action de } \delta(t)$$



D'où la conclusion que les *propriétés de l'impulsion de Dirac* sont identiques à celles d'un *signal rectangulaire* dont la *largeur tend vers 0* et la *hauteur vers l'infini*, à surface constante.

✉ le choix de $g_T(t)$ n'est pas unique (cf. théorie mathématique des distributions)

✉ $\delta(t)$ = *idéalisation* d'une situation réelle

ex: la réponse d'un système à un signal "extrêmement bref" sera décrite par sa réponse à l'impulsion de Dirac (c'est-à-dire par la limite asymptotique où la durée du signal tend vers 0)

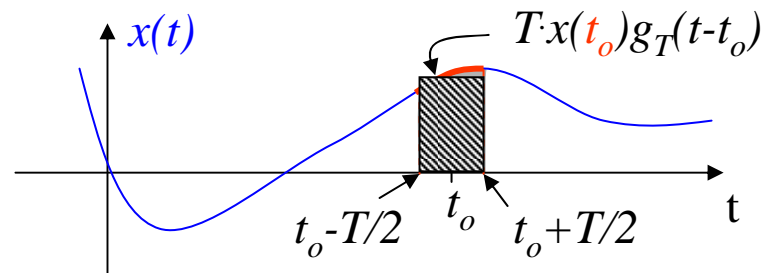
Propriétés

$$1) \delta(t) \quad \leftrightarrow \quad 1$$

$$2) \delta(t-t_o) \quad \leftrightarrow \quad \exp(-i2\pi f t_o) \quad (\text{cf. T.F. d'un signal retardé})$$

$$3) \exp(i2\pi f_o t) \quad \leftrightarrow \quad \delta(f-f_o) \quad (\text{cf. réciprocity de la T.F.})$$

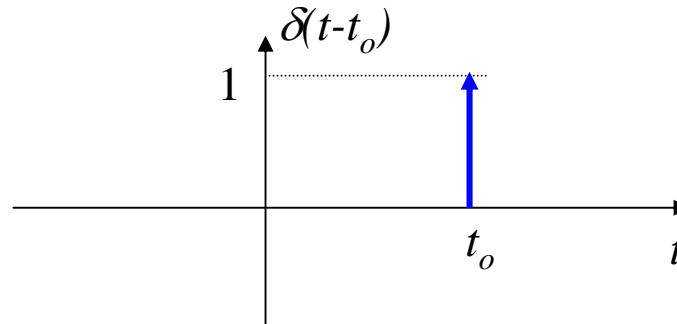
$$4) x(t)\delta(t-t_o) = x(t_o)\delta(t-t_o) \quad (\text{proche de } t_o, \text{ le signal } x(t) \text{ peut être remplacé par } x(t_o) \dots)$$



$$5) [x(t) * \delta(t-t_o)](\tau) = x(\tau-t_o)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \delta(\tau-t-t_o) dt \stackrel{(4)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau-t_o) \delta(\tau-t-t_o) dt = x(\tau-t_o) \cdot 1$$

Représentation graphique



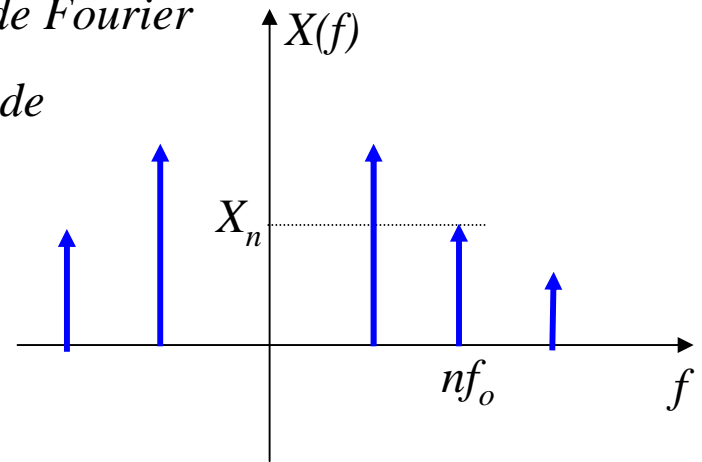
B) Signaux périodiques

$$x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \exp(i \cdot 2\pi n f_o t)$$

où X_n = coefficients de Fourier

$f_o = 1/T$; T = période

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \delta(f - n \cdot f_o)$$



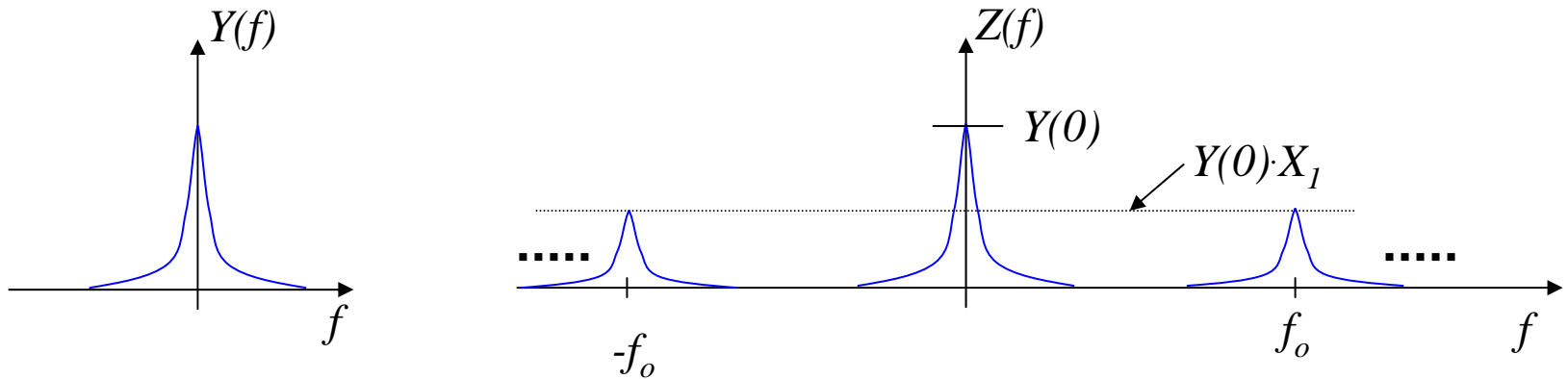
✉ signal périodique \Rightarrow énergie infinie

Produit d'un signal d'énergie finie par un signal périodique:

$$z(t) = x_T(t) \cdot y(t) \leftrightarrow Z(f) = X(f) * Y(f) = \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \delta(f - n \cdot f_o) \right] * Y(f)$$

$$\longrightarrow Z(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \cdot Y(f - n \cdot f_o)$$

Cas $y(t) = \text{pair}$ (Y réel):



I. 5 Signaux numériques

A) Introduction

- ✉ En Physique il est fréquent que les résultats expérimentaux soient sous forme d'une *suite de valeurs numériques*. Pour caractériser et traiter un tel *signal numérique* on peut utiliser les mêmes concepts mathématiques qu'au chapitre précédent, à condition de les *adapter* au contexte numérique.
- ✉ Les possibilités d'application du *traitement numérique des signaux* sont d'autant plus nombreuses que la *vitesse de calcul* des microprocesseurs est élevée.
- ✉ Les signaux numériques dérivent souvent d'un signal analogique par *échantillonnage*. En cas d'échantillonnage *idéal* : $x(n) = x_a(nT)$, où $x(n)$ désigne le signal numérique, $x_a(t)$ le signal analogique, T la période d'échantillonnage et n un entier. (Si t représente le temps, n est un indice *temporel*)
- ✉ L'amplitude des signaux numériques est quantifiée en raison du nombre fini d'octets pour représenter $x(n)$.

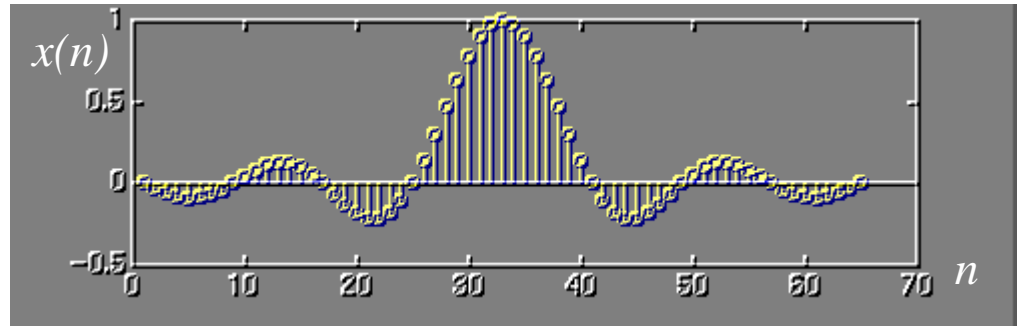
B) Transformée de Fourier

exemple:

$x(n)$ = signal numérique

Définition

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-i2\pi f n} \quad (1)$$



Lien avec la transformée d'un signal échantillonné :

signal “échantillonné”: $x_e(t) = x_a(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \leftrightarrow$ échantillonnage idéal

↑
signal analogique

$$\rightarrow x_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a(nT) \delta(t - nT) \leftrightarrow X_e(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a(nT) e^{-i2\pi f nT} \quad (2)$$

$\rightarrow (1) \equiv (2)$ à condition de poser $T = 1$

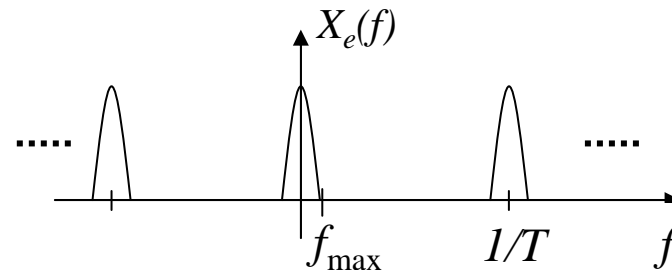
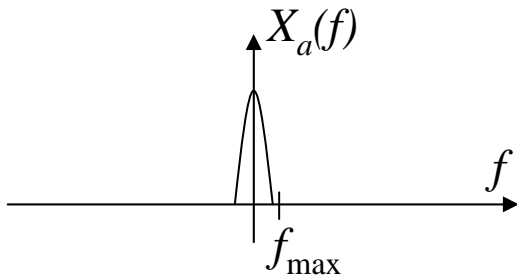
comme
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \leftrightarrow \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

(T.F. d'un "peigne de Dirac",
cf cours de mathématiques)

d'où
$$x_e(t) \leftrightarrow X_a(f) * \left(\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) \right)$$

$$X_e(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_a\left(f - \frac{n}{T}\right) = X(f) \text{ pour } T=1$$

↳ répétition périodique de période $1/T$ de $X_a(f)$



✉ chaque période de $X_e(f)$ reproduit fidèlement $X_a(f)$ à condition que la fréquence d'échantillonnage soit supérieure à $2f_{\max}$. (Théorème de Shannon)

Propriétés de $X(f)$:

- 1) périodicité: $X(f+1) = \dots = X(f)$ \longleftrightarrow *par définition*
 $\text{période} = 1$
 $X(f) \equiv$ série de Fourier
où $x(n)$ = coefficients de Fourier !

2) Transformée inverse: $x(n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(f) \cdot e^{i2\pi fn} df$ $\nwarrow \nearrow$

3) Retard: pour $y(n) = x(n-n_o) \dots \Rightarrow Y(f) = X(f)e^{-i2\pi fn_o}$

4) Produit de convolution:

$$y(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)g(k-n) = [x * g](k) = [g * x](k) \leftrightarrow Y(f) = X(f) \cdot G(f)$$



[Spectrum analyser demo](#)

[Joy of Convolution \(Discrete time\)](#)

C) Transformée de Fourier discrète (TFD) :

⊠ La Transformée de Fourier définie au paragraphe précédent est *impropre au calcul* numérique puisque f est une variable *continue* et que le calcul de $X(f)$ nécessite la connaissance d'une *infinité* d'échantillons du signal temporel.

Discrétisation de f : $f = n \Delta f$, où Δf est l'incrément sur l'axe des fréquences

En choisissant N valeurs de f sur une période de $X(f)$, on a $\Delta f = 1/N$

⇒
$$x(k) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(f) \cdot e^{i2\pi f k} df \approx \frac{1}{N} \sum_{m=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} X\left(\frac{m}{N}\right) \cdot e^{i2\pi \frac{m}{N} k} \stackrel{\text{déf.}}{=} x_p(k)$$

Qualité de cette approximation ?

⊠
$$e^{i2\pi \frac{m}{N}(k+N)} = e^{i2\pi \frac{m}{N} k} \Rightarrow x_p(k) \text{ est périodique de période } N$$

⇒
$$\dots \rightarrow x_p(k) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x(l \cdot N + k) = \text{superposition périodique de versions décalées du signal } x(k)$$

✉ si $x(k)$ est à *durée limitée* inférieure ou égale à N , chaque période de $x_p(k)$ est une *réplique exacte* de $x(k)$

✉ On doit choisir $N \geq$ durée du signal pour éviter la déformation par *recouvrement*

Pour des signaux à *durée limitée*, il existe une relation réciproque entre les N valeurs de $x(k)$ et les N valeurs prises par $X(f)$ sur *une période* :

Pour $x(n)$ non nul sur $[n_o, n_o + N - 1]$:
$$X(f) = \sum_{n=n_o}^{n_o+N-1} x(n)e^{-i2\pi fn}$$

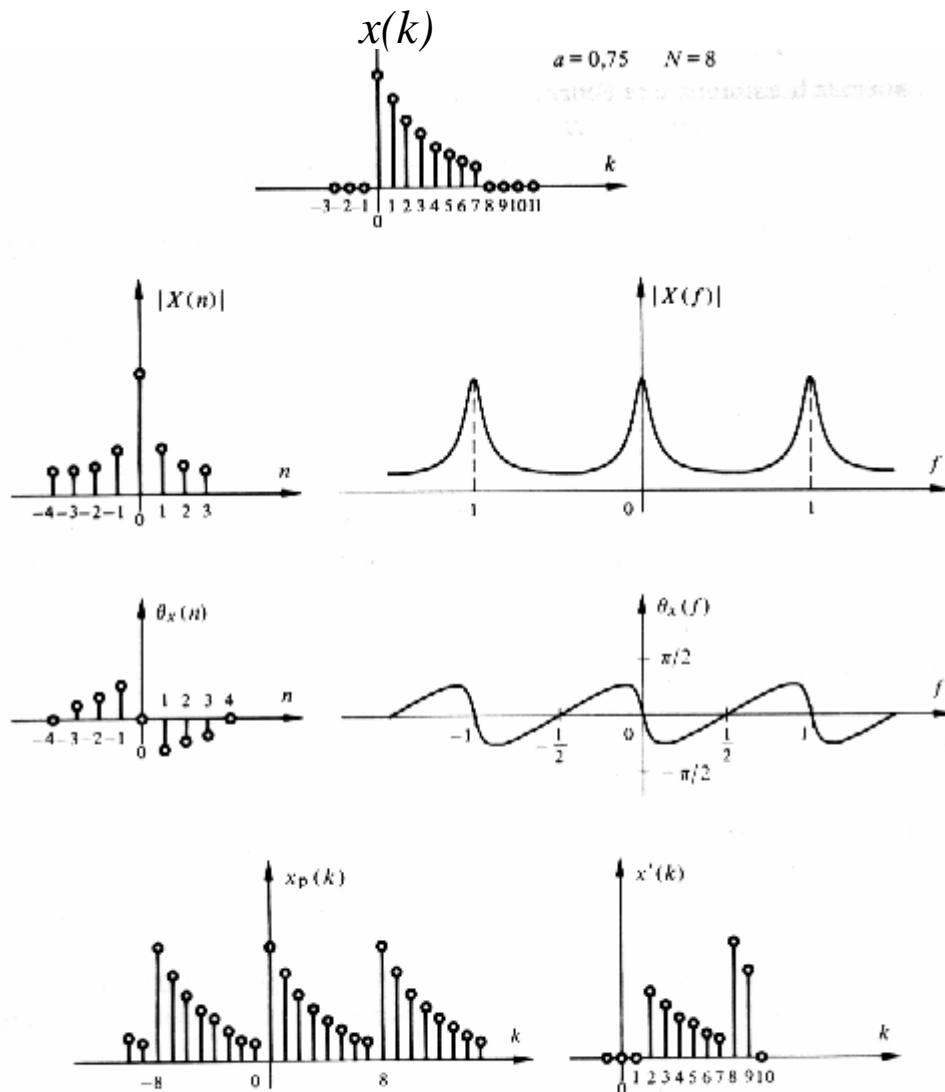
d'où en notant

$X(m) = X(m/N)$:

$$X(m) = \sum_{n=n_o}^{n_o+N-1} x(n)e^{-i2\pi \frac{m}{N}n}, \quad m = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} X(m)e^{i2\pi \frac{m}{N}n}, \quad n = n_o, \dots, n_o + N - 1$$

"Transformée de
Fourier Discrète"



[Fig 3.1, (IV)]

☒ Toute l'information sur le signal est contenue dans les N valeurs de $x(k)$ *ou* de $X(m)$

☒ La "Transformée de Fourier Rapide" (TFR) est un *algorithme efficace* qui permet de calculer la TFD en tenant compte des redondances apparaissant dans l'expression de la TFD. La TFR rend accessible le calcul *en temps réel* de la transformée de Fourier des signaux à durée limitée.

☒ En cas de signal à durée *illimitée*, la TFD ne s'applique que sur le signal *tronqué*.



D) Transformée en z (un aperçu)

Définition

$$T.z\{x(k)\} = X_z(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \cdot z^{-k}, \quad \text{avec } z \in \mathbb{C} \quad \text{"Transformée en z de } x(k)\text{"}$$

- ⊠ $X_z(z)$ = fonction complexe de la variable complexe z
- ⊠ Pour les signaux usuels le *domaine de convergence* de $X_z(z)$ est un anneau centré sur l'origine du plan complexe
- ⊠ pour $z = e^{i2\pi f}$, $X_z(z) \equiv X(f)$ \uparrow X_z = généralisation de la T.F.
- ⊠ X_z = outil de caractérisation des systèmes de traitement numérique des signaux (cf. chap II.1)


exemple : $x(k) = \alpha^k \varepsilon(k)$, avec $\varepsilon(k) = \begin{cases} 1 & \text{pour } k \geq 0 \\ 0 & \text{pour } k < 0 \end{cases}$

$$\text{et } |\alpha| < 1 \Rightarrow \dots \Rightarrow X_z(z) = \frac{z}{z - \alpha}$$

Caractérisation du signal par les points singuliers de $X_z(z)$:

$$z = e^{i2\pi f}, f \in \mathbb{R} \Rightarrow z \in \text{cercle unité du plan complexe}$$

Cas des transformées en z rationnelles:



$$X_z(z) = A \frac{(z - z_1)(z - z_2)(z - z_2) \cdots}{(z - p_1)(z - p_2)(z - p_3) \cdots}$$

(voir §I.3C)

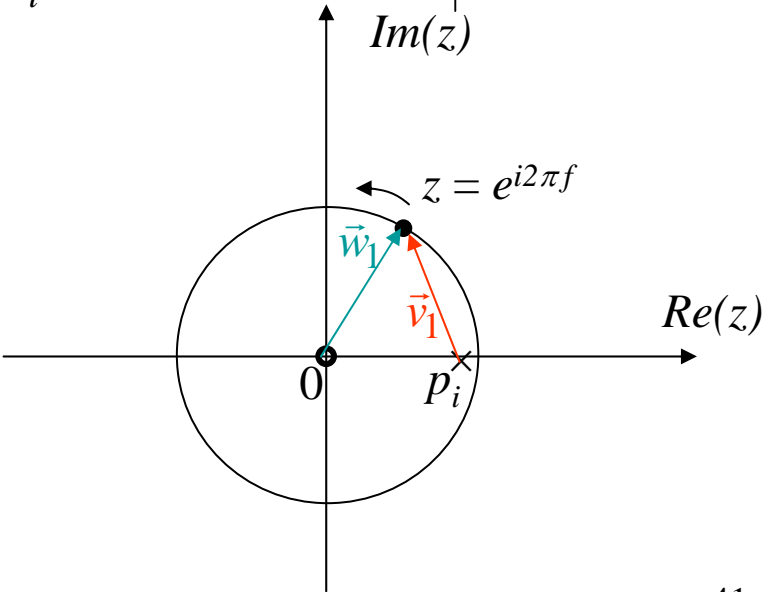
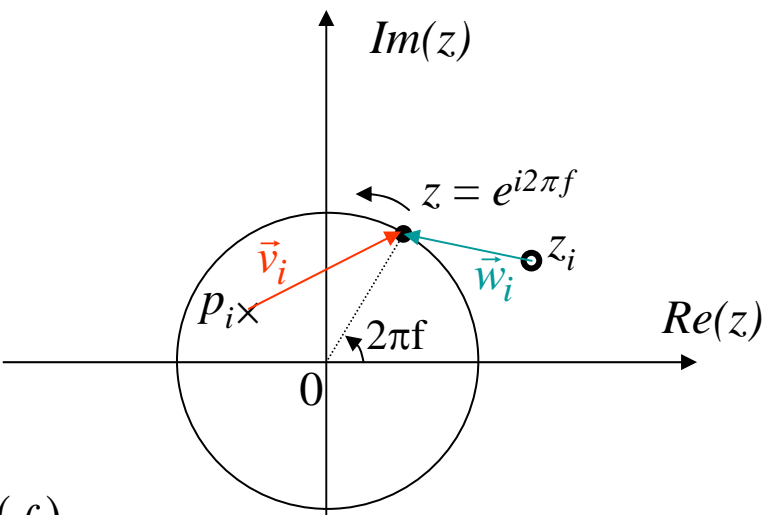
$$|X(f)| = \frac{\cdots \|\vec{w}_i\| \cdots}{\|\vec{w}_i\|} \text{ et } Arg[X(f)] = \sum_i \theta_{w_i}(f) - \sum_i \theta_{v_i}(f)$$

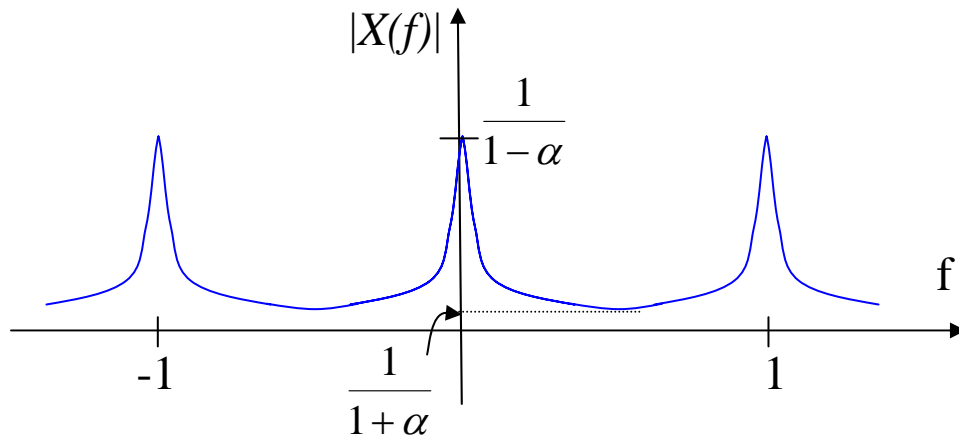
exemple : $X_z(z) = \frac{z}{z - \alpha}, |\alpha| < 1$

$$\rightarrow p_1 = \alpha, \quad z_1 = 0$$

☒ $\|\vec{w}\|$ n'intervient que sur la phase du signal

☒ $|X(f)|$ est périodique





- ⊠ un pôle proche du cercle unité **tend** à augmenter $|X(f)|$ aux alentours de $f = \text{Im}(p_i)/2\pi$
- ⊠ un zéro proche du cercle unité **tend** à diminuer $|X(f)|$ aux alentours de $f = \text{Im}(z_i)/2\pi$
- ⊠ dans des cas simples (nombre réduit de points singuliers) cette méthode permet de rapidement tracer une **esquisse** de $|X(f)|$
- ⊠ dans des cas plus complexes elle peut servir de base pour automatiser, par voie informatique, le tracé de $|X(f)|$ et $\text{Arg}[X(f)]$
- ⊠ pour tout signal physique les pôles sont *à l'intérieur* du cercle unité
- ⊠ pour signal **réel**: les points singuliers apparaissent par **paires** de complexes conjugués

E) Corrélation des signaux

Par analogie avec les signaux analogiques on définit les fonctions de corrélations suivantes:

$$\text{fonction d'intercorrélation : } \phi_{xy}^{\circ}(k) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x^*(l)y(l+k)$$

$$\text{densité interspectrale d'énergie : } \phi_{xy}^{\circ}(f) = X^*(f)Y(f)$$

$$\text{fonction d'autocorrélation : } \phi_x^{\circ}(k) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x^*(l)x(l+k)$$

$$\text{densité spectrale d'énergie : } \phi_x^{\circ}(f) = |X(f)|^2$$

$$\boxtimes \phi_x^{\circ}(f) = \text{fonction périodique de période 1}$$

$$\boxtimes W_x = \phi_x^{\circ}(0) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} |x(l)|^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |X(f)|^2 df$$

I. 6 Signaux aléatoires

A) Introduction

✉ tout signal physique comporte une *composante aléatoire*:

↓ perturbation externe (ou "bruit").

ex: agitation thermique → tension aléatoire aux bornes d'une résistance

perturbation atmosphérique → fluctuations de la brillance des étoiles

↓ signal issu d'un système très complexe

ex: jet de dés, processus biologique, météorologie, ...

↓ processus quantique

ex: signal délivré par un détecteur Geiger

✉ l'évolution du signal est *imprévisible*

✉ description *statistique* des signaux

B) Notion de Probabilité

Probabilité d'un événement :

Soit A un *résultat possible* d'une expérience aléatoire, N le *nombre de réalisation* de l'expérience et n_A le *nombre de fois que le résultat A est apparu*, alors :

Probabilité de l'événement "le résultat de l'expérience est A " : $P(A) \stackrel{\text{déf.}}{=} \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{n_A}{N}$

Probabilité conjointe et conditionnelle :

Soient A et B deux événements distincts alors:

Probabilité conjointe que A et B aient lieu : $P(A, B) \stackrel{\text{déf.}}{=} \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{n_{AB}}{N}$

avec n_{AB} = *nombre de fois que A et B sont apparus*


$$\text{or } P(A, B) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{n_{AB}}{n_A} \frac{n_A}{N} \right) = \underbrace{\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{n_{AB}}{n_A} \right)}_{\text{"}P(B/A)\text{"}} \cdot \underbrace{\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{n_A}{N} \right)}_{P(A)} \stackrel{\text{d\'ef}}{=} P(B/A) \cdot P(A)$$

$P(B/A)$ = Probabilité que B ait lieu *sachant que* A a eu lieu

Probabilité
conditionnelle

$$\boxtimes P(A, B) = P(B/A) \cdot P(A) = P(A/B) \cdot P(B)$$

Evénements indépendants :

 L'apparition de B ne dépend pas de l'éventuelle apparition de A

$$\Rightarrow P(B/A) = P(B)$$

$$\Rightarrow \boxed{P(A, B) = P(A) \cdot P(B)}$$

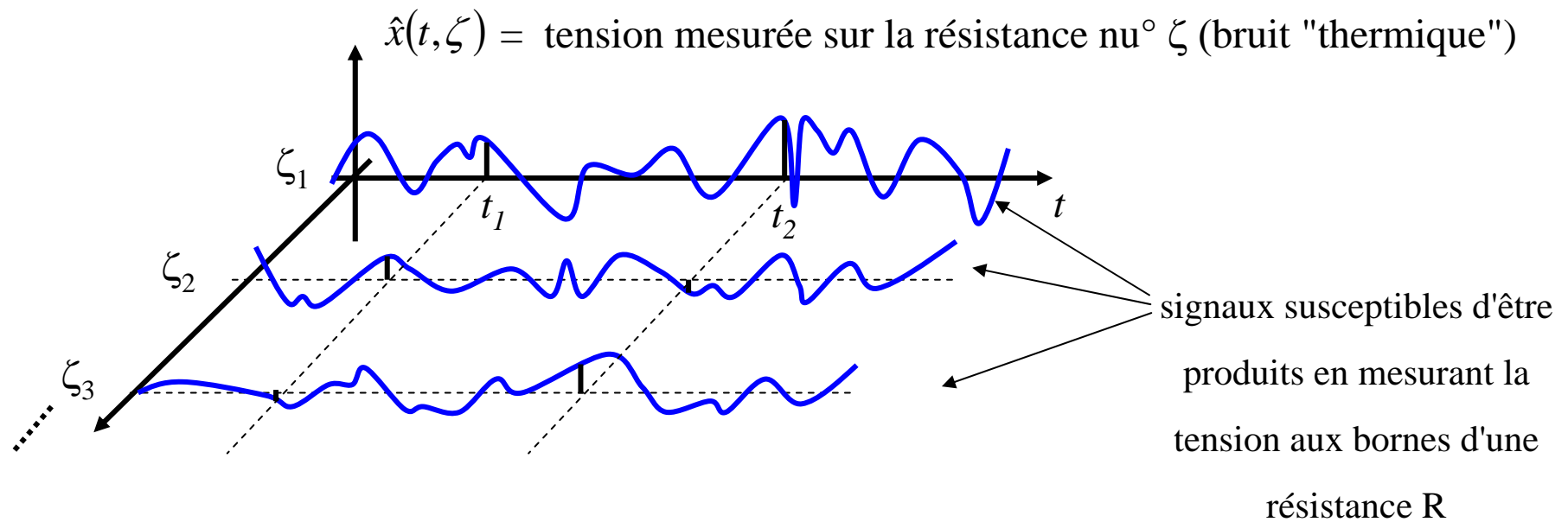
C) Processus aléatoires

- ✉ un phénomène (ou processus) est dite aléatoire lorsqu'il dépend d'une certaine manière des *lois du hasard*
- ✉ les signaux produits par un processus aléatoire sont *imprévisibles* ; ils ne possèdent pas de représentations temporelles analytiques
- ✉ un signal aléatoire *observé* peut être considéré comme une *réalisation particulière* d'un *ensemble de signaux similaires* qui sont tous *susceptibles d'être produits* par le même processus aléatoire

Expérience virtuelle :

Considérons le processus aléatoire: "tension électrique aux bornes d'une résistance R non polarisée"

Des mesures de tension effectuées simultanément sur plusieurs résistances *identiques* (même R , même environnement,...) donneraient lieu à des *signaux différents*.



Description mathématique:

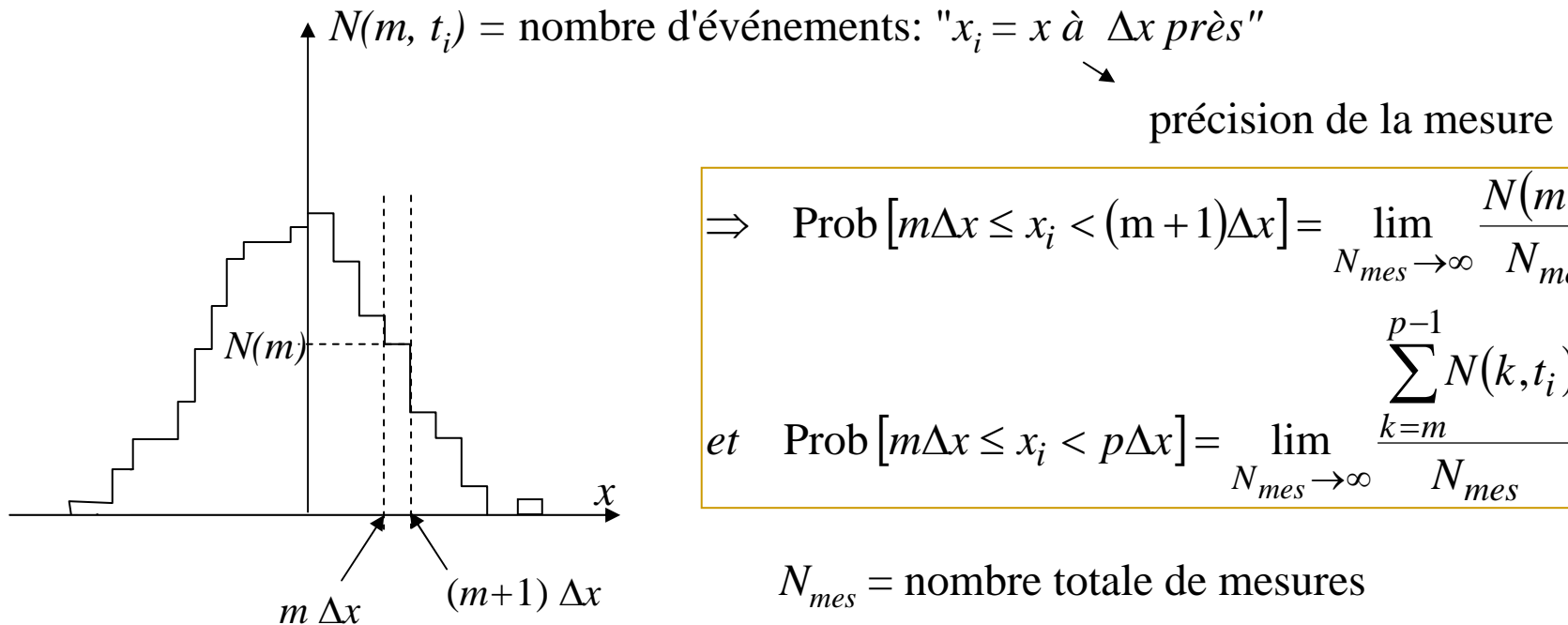
- ⊠ Le **processus aléatoire** est représentée par une **famille de fonctions** $\hat{x}(t, \zeta)$ ou, plus simplement, $\hat{x}(t)$,
- ⊠ ζ est un élément de l'**espace des épreuves** : il décrit la nature **aléatoire** du processus
- ⊠ chaque **membre** de $\hat{x}(t)$ est un **signal aléatoire** qu'il convient de noter simplement $x(t)$
- ⊠ A chaque **instant** le processus $\hat{x}(t, \zeta)$ se réduit à une **variable aléatoire** $\hat{x}(t_i)$ noté plus simplement \hat{x}_i

Densité de probabilité

✉ Les *propriétés statistiques* d'un processus aléatoire peuvent être décrites au moyen d'une *densité de probabilité*

Expérience virtuelle (suite...)

On peut représenter les résultats de l'expérience virtuelle par un histogramme:



Idéalisation:

Lorsque $\Delta x \rightarrow dx$ l'histogramme devient une fonction *continue* de x .

$$\Rightarrow N(m, t_i) \rightarrow n(x, t_i) dx = \text{nombre d'événements où } x_i \in [x, x+dx]$$

 nombre d'événements par *unité de x*

$$\Rightarrow \text{Prob} [x_1 \leq x_i < x_2] = \int_{x_1}^{x_2} p(x, t_i) dx$$

$$\text{où } p(x, t_i) = \lim_{N_{mes} \rightarrow +\infty} \frac{n(x, t_i)}{N_{mes}} = \textit{densité de probabilité de } \hat{x}_i$$

✉ $p(x, t_i)$ = concept purement *théorique*. En pratique la précision et N_{mes} sont *finis*

✉ \hat{x}_i variable *gaussienne* $\Leftrightarrow p(x, t_i)$ = gaussienne.

✉ Normalisation de $p(x, t_i)$: $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x, t_i) dx = 1$



Fonction de répartition :

On appelle fonction de répartition la fonction $F(x, t_i) = \text{Prob}[x_i \leq x]$

$$F(x, t_i) = \int_{-\infty}^x p(x', t_i) dx' \quad \Rightarrow \quad p(x, t_i) = \frac{dF(x, t_i)}{dx}$$

✉ Il est parfois plus facile de calculer d'abord $F(x, t_i)$ pour ensuite en dériver $p(x, t_i)$

✉ Le comportement statistique d'une variable aléatoire est décrit par sa fonction de répartition ou par sa densité de probabilité

Processus multiples

En cas de plusieurs variables aléatoires, \hat{x}_i et \hat{y}_j , on peut définir des densités de probabilités conjointes par:

$$\text{Prob}[x_i \in \Delta x \text{ et } y_j \in \Delta y] = \iint_{\Delta x \Delta y} p(x, y; t_i, t_j) dx dy$$

Pour des variables *indépendantes* : $p(x, y; t_i, t_j) = p(x, t_i) \cdot p(y, t_j)$

D) Espérances mathématiques

☒ Toute fonction f d'une variable aléatoire \hat{x}_i est une variable aléatoire \hat{f}_i .

La connaissance des lois de probabilités nous permet de déterminer les **valeurs espérées théoriquement** - ou **espérances mathématiques** - ou encore *moyenne statistique* de \hat{f}_i :

$$E\{\hat{f}_i\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) p(x, t_i) dx$$

Statistiques du 1^{er} ordre :

valeur *moyenne statistique*: $\mu_x(t_i) = E\{\hat{x}_i\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p(x, t_i) dx$

valeur *quadratique moyenne*: $m_{x^2}(t_i) = E\{\hat{x}_i^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot p(x, t_i) dx$

variance : $\sigma_x^2(t_i) = E\{\hat{x}_i - \mu_x(t_i)\}^2 = m_{x^2} - \mu_x(t_i)^2$

écart -type : $\sigma_x(t_i) = \sqrt{m_{x^2} - \mu_x^2}$

Statistiques du 2nd ordre :

Fonction *d'autocorrélation statistique* :

$$R_x(t_1, t_2) = E\{\hat{x}_1 \cdot \hat{x}_2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 \cdot x_2 \cdot p(x_1, x_2; t_1, t_2) \cdot dx_1 \cdot dx_2$$

Fonction *d'autocovariance* statistique :

$$C_x(t_1, t_2) = E\{[\hat{x}_1 - \mu_x(t_1)] \cdot [\hat{x}_2 - \mu_x(t_2)]\} = R_x(t_1, t_2) - \mu_x(t_1) \cdot \mu_x(t_2)$$

✉ Pour des processus *centrés* ($\mu_x(t)=0$): $C_x(t_1, t_2) = R_x(t_1, t_2)$

Fonction *d'intercorrélation statistique* : $R_{xy}(t_1, t_2) = E\{\hat{x}_1 \cdot \hat{y}_2\}$

Fonction *d'intercovariance* statistique : $C_{xy}(t_1, t_2) = R_{xy}(t_1, t_2) - \mu_x(t_1) \cdot \mu_y(t_2)$

Processus Stationnaires

On désigne par *stationnaire* les processus dont les *caractéristiques statistiques* sont *indépendantes du temps* : $\Leftrightarrow p(x, t_i) = p(x);$

$$\mu_x(t_i) = \mu_x$$

$$R_{xy}(t_1, t_2) = R_{xy}(\tau) \text{ avec } \tau = t_2 - t_1$$

...

- ✉ Il ne faut pas confondre "processus *stationnaire*" avec "processus *indépendant de t*"
- ✉ On parle de *stationnarité au sens large* lorsque *seul* μ_x et R_x sont indépendants de t
- ✉ De nombreux phénomènes sont approximativement stationnaires sur des durées d'observation finies

Exemples:

- les numéros gagnant de la loterie national obéissent à un processus stationnaire!
- les chutes de pluies à Strasbourg sont issues d'un processus non stationnaire: il peut en moyenne plus souvent au mois de novembre qu'au mois d'août...

E) Moyennes temporelles et ergodisme :

- ✉ Il n'est pas toujours possible de réaliser un nombre suffisant de mesures pour établir les propriétés statistiques d'un processus aléatoire.
- ✉ On peut calculer les *valeurs moyennes temporelles* d'un *signal aléatoire* pour extraire des informations complémentaires sur le *comportement moyen* du processus

Définition

f = fonction d'un *signal aléatoire* $x(t)$:

$$\Rightarrow \overline{f[x(t)]} \stackrel{\text{déf.}}{=} \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f[x(t)] \cdot dt = \text{valeur moyenne temporelle de } f$$

- ✉ l'inexistence d'expressions analytiques pour décrire les signaux aléatoires rend les valeurs moyennes temporelles *impropres au calcul*. Elles indiquent cependant la *procédure expérimentale* à suivre. (p.ex. calcul numérique sur un tableau de valeurs expérimentales)
- ✉ Par convention on considère les signaux aléatoires comme ayant une puissance moyenne finie
- ✉ La durée d'observation est nécessairement finie...

Principales moyennes temporelles :

valeur moyenne : $\bar{x} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cdot dt$

valeur quadratique moyenne : $\overline{x^2} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) \cdot dt = P_x$

variance temporelle : $\sigma_x^2 = \overline{[x(t) - \bar{x}]^2}$

écart-type temporel : $\sigma_x = \sqrt{\overline{[x(t) - \bar{x}]^2}} = \text{"valeur efficace"}$

fonction d'autocorrélation : $\varphi_x(\tau) = \overline{x(t) \cdot x(t + \tau)} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cdot x(t + \tau) \cdot dt$

fonction d'intercorrélation : $\varphi_{xy}(\tau) = \overline{x(t) \cdot y(t + \tau)}$

Ergodisme

Un processus aléatoire est dit *ergodique* lorsque *les valeurs moyennes statistiques et temporelles* sont identiques :

$$\mu_x = \bar{x}; \quad m_{x^2} = \overline{x^2}; \quad R_x(\tau) = \varphi_x(\tau) \dots$$

✉ un processus ergodique est nécessairement stationnaire, mais la réciproque n'est pas vraie

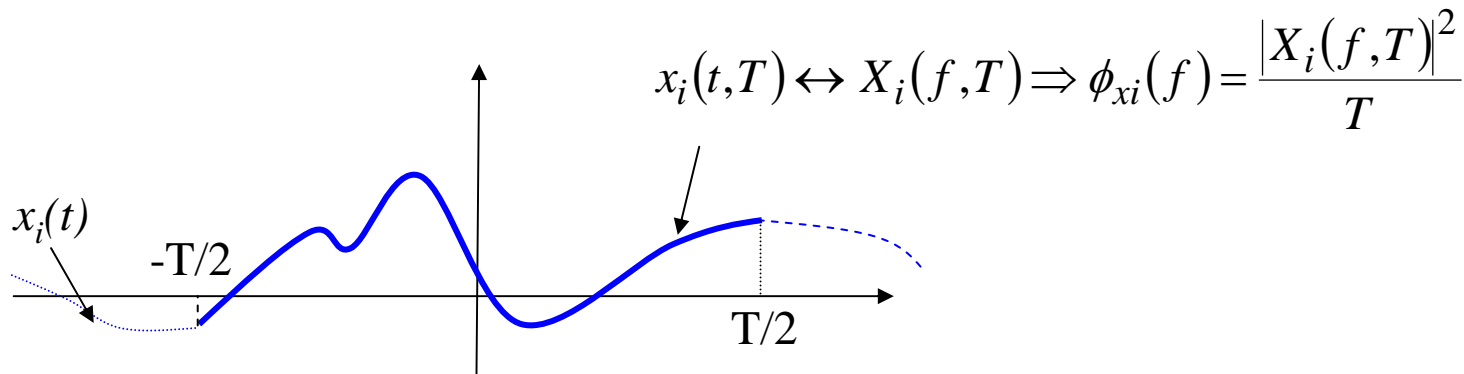
✉ lorsque l'*hypothèse d'ergodisme* est justifiée, on est en droit d'estimer les propriétés statistiques d'un processus aléatoire par l'analyse temporelle d'un signal $x(t)$ *unique*.

F) Densité spectrale

- ☒ Comment décrire la distribution spectrale moyenne d'un signal aléatoire?
- ☒ La transformée de Fourier d'un signal aléatoire est elle même aléatoire...
- ☒ La densité spectrale de puissance d'un signal $x(t)$, donnée par:

$$\phi_x(f) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{|X(f, T)|^2}{T} \quad \text{avec } X(f, T) = x(t) \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

Lorsque $x(t)$ représente un signal aléatoire ϕ_x est aussi aléatoire, d'où la nécessité de redéfinir la densité spectrale de puissance par:

$$\phi_x(f) = \lim_{T \rightarrow +\infty} E \left\{ \frac{|X(f, T)|^2}{T} \right\}$$


Théorème de Wiener-Khinchine : (sans démonstration, cf Coulon)

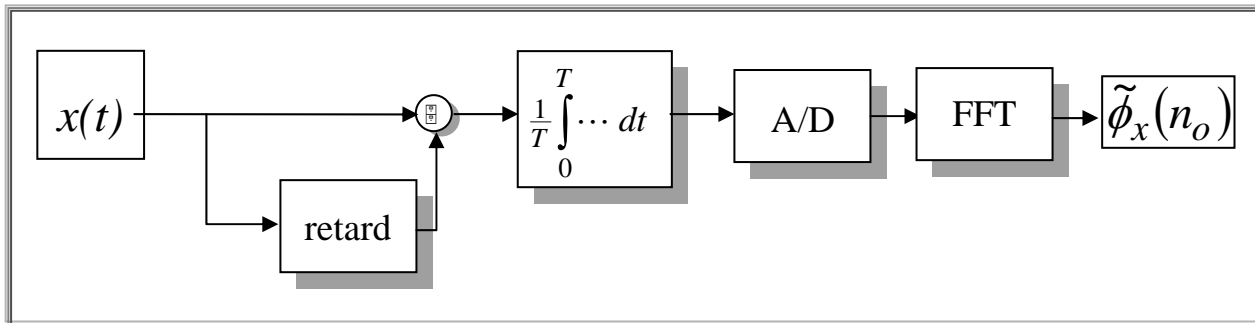
On montre que pour des signaux *stationnaires au sens large* : $\phi_x(f) \leftrightarrow R_x(\tau)$

Cas des signaux *ergodiques*: $R_x(\tau) = \varphi_x(\tau) \Rightarrow \phi_x(f) \leftrightarrow \varphi_x(\tau)$

✉ Définition *unique* de la densité spectral d'un signal, qu'il soit déterministe ou aléatoire

Procédure "expérimentale" pour estimer ϕ_x : durée d'observation $T =$ finie

$$\tilde{\varphi}_x(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot x(t + \tau) \cdot dt \approx \varphi_x(\tau) \quad \leftrightarrow \quad \tilde{\phi}_x(f) \approx \phi_x(f)$$



F) Processus aléatoires corrélés et processus indépendants

✉ Deux systèmes physiques en interaction produisent fréquemment des signaux *corrélés* \Leftrightarrow existence d'une relation entre signaux

✉ Réciproquement, lorsque deux signaux sont statistiquement *indépendants*, les systèmes physiques, qui sont à l'origine des signaux, interagissent peu ou pas du tout.

✉ Comment décrire respectivement la corrélation et l'indépendance entre signaux aléatoires ?

Considérons les deux processus aléatoires stationnaires:

$\hat{x}(\zeta, t) = \mu_x + \hat{v}(\zeta, t)$ et $\hat{y}(\zeta, t) = \mu_y + \hat{w}(\zeta, t) \Leftrightarrow \hat{v}(\zeta, t)$ et $\hat{w}(\zeta, t)$ = processus *centrés*

$\Rightarrow \hat{v}_i$ et \hat{w}_j = fluctuations de \hat{x} et \hat{y} autour de μ_x et μ_y à l'instant t_i et t_j

Recherchons la relation *linéaire* entre \hat{v}_i et \hat{w}_j qui tient compte au mieux des propriétés statistiques de ces deux variables aléatoires.

➡ pour quelle valeur de la constante A , l'erreur quadratique moyenne $\varepsilon(A)$,

définie par $\varepsilon(A) = E\left\{\left(\hat{v}_i - A\hat{w}_j\right)^2\right\}$ est *minimale*?

✉ si la relation $\hat{v}_i = A\hat{w}_j$ était exacte, on aurait $\varepsilon(A) = 0$

✉ s'il n'existait *pas* de relation entre les deux variables, alors $\varepsilon(A)$ serait minimal pour $A = 0$

✉ $E\{\hat{v}_i - A\hat{w}_j\} = 0 \quad \forall A$ car il s'agit de processus *centrés*

✉ on ne peut avoir $\hat{v}_i = A\hat{w}_j + B$, avec $B \neq 0$

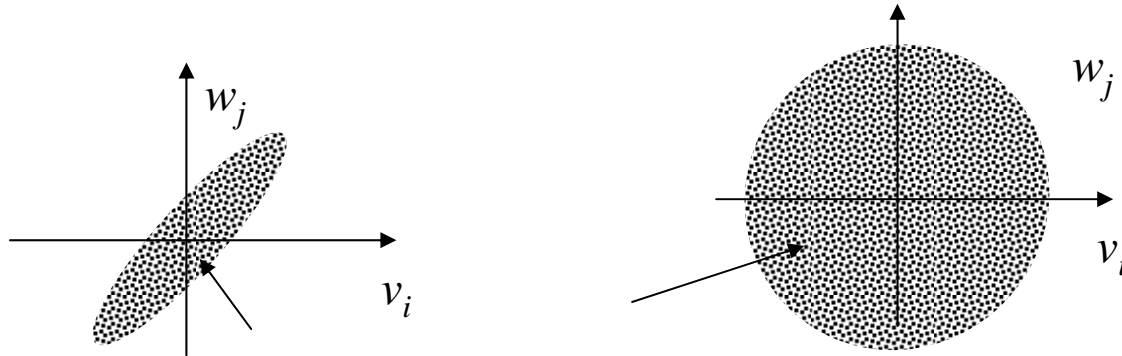
$$\varepsilon(A) \text{ est minimale} \Leftrightarrow \frac{d\varepsilon(A)}{dA} = 0 \Rightarrow A = \frac{E\{\hat{v}_i \hat{w}_j\}}{E\{\hat{w}_j^2\}} = \frac{C_{xy}^2(\tau)}{\sigma_y^2}, \quad \tau = t_j - t_i$$

$$\text{et } \varepsilon_{\min} = \sigma_x^2 \left[1 - \frac{C_{xy}^2(\tau)}{\sigma_x^2 \sigma_y^2} \right] \stackrel{\text{déf}}{=} \sigma_x^2 [1 - \rho^2(\tau)]$$

↳ ρ = coefficient de corrélation normalisé
on a toujours $|\rho| \leq 1$ car ε_{\min} est par définition ≥ 0

⊠ $\rho(\tau)=1 \Rightarrow \varepsilon_{\min} = 0 \stackrel{!}{\Leftrightarrow} \hat{v}_i = A\hat{w}_j \rightarrow \hat{x}_i \text{ et } \hat{y}_j \text{ sont totalement corrélés}$

⊠ $\rho(\tau)=0 \Rightarrow \varepsilon_{\min} = \sigma_x^2 \rightarrow \hat{x}_i \text{ et } \hat{y}_j \text{ sont } \textit{non-corrélés}$



ρ proche de 1
points expérimentaux

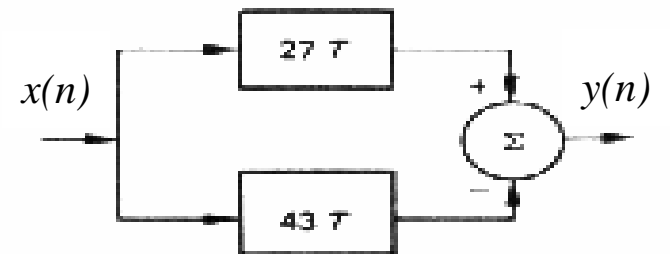
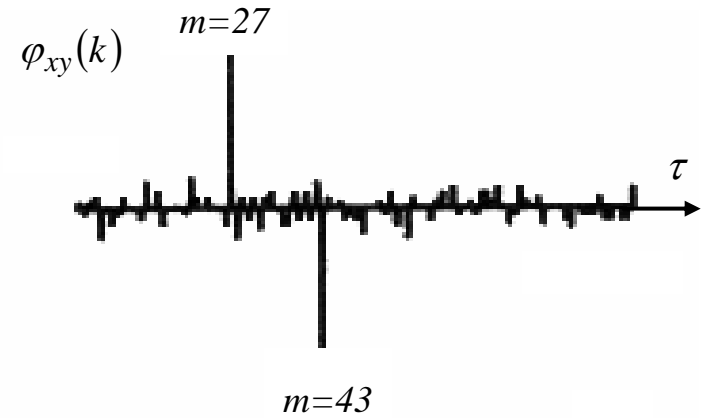
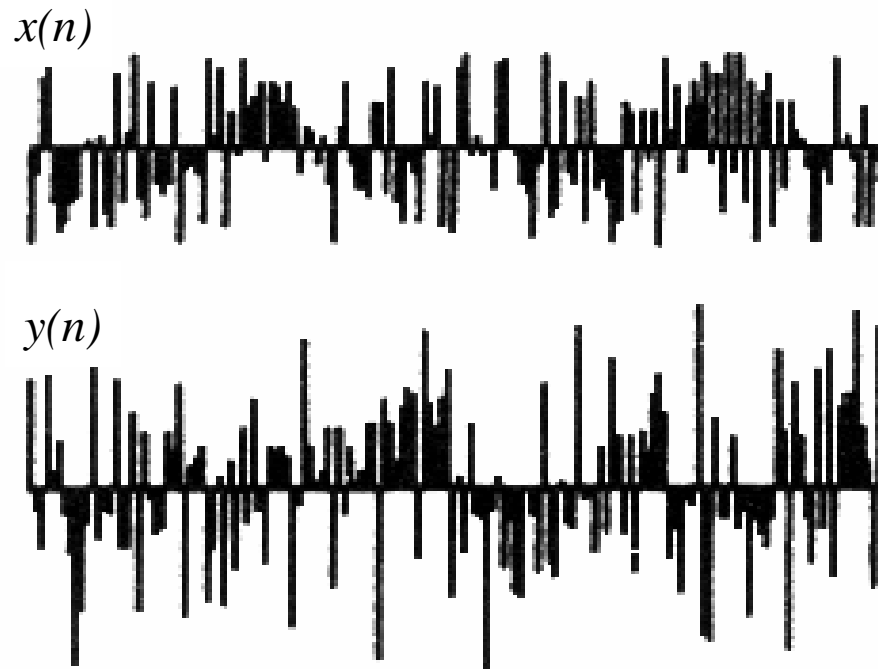
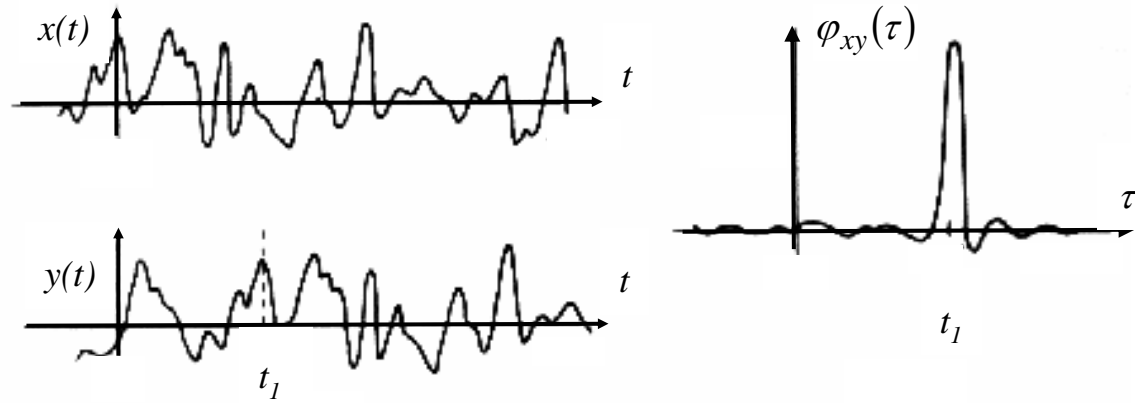
ρ proche de 0

⊠ $\rho(\tau)$ et par conséquent $C_{xu}(\tau)$ ou $R_{xy}(\tau)$ mesurent le degré de corrélation entre deux processus aléatoires

⊠ On peut faire le même raisonnement en utilisant les *moyennes temporelles*; en cas de processus ergodiques les deux descriptions sont *équivalents*

$\rightarrow \varphi_{xy}(\tau)$ évalue le degré de corrélation entre $\hat{x}(t)$ et $\hat{y}(t + \tau)$

Illustrations



[Figure 6.1 et 6.3 (II)]

$x(n)$



$y(n)$



$\varphi_{xy}(k)$

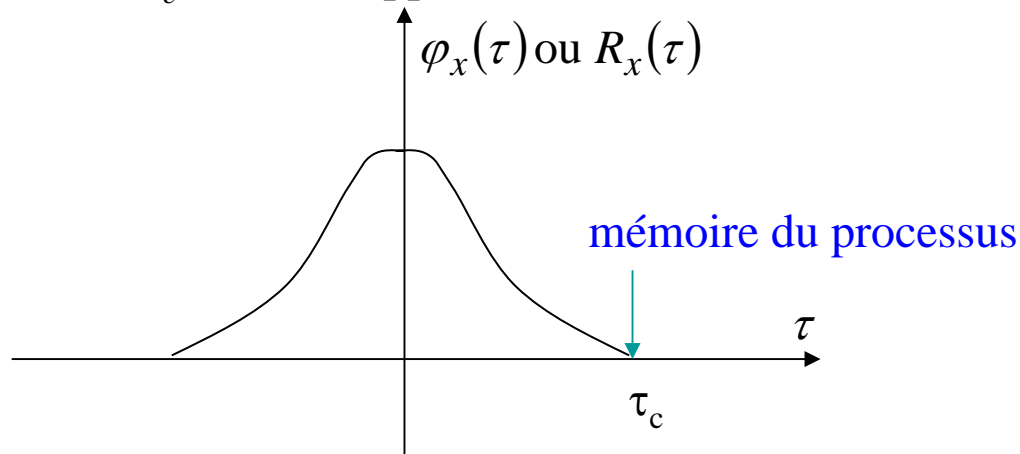


[Figure 6.4 (II)]

Mémoire d'un processus :

✉ La fonction d'*autocorrélation* mesure la corrélation entre les signaux émis par un *même* processus à deux *instants différents*. Lorsqu'il y a corrélation on peut parler d'un "effet mémoire" du processus.

✉ On définit la **mémoire** du processus comme le temps τ_c au delà duquel la *corrélation* est *négligeable*. τ_c est aussi appelé **temps de corrélation**.



✉ La mémoire d'un processus est d'autant plus faible que la densité spectrale des signaux produits est étendue

Bruit blanc

Le cas extrême $\varphi_x(\tau) = c \cdot \delta(\tau)$ représente un processus virtuellement *sans mémoire*.

Par transformée de Fourier: $\phi_x(f) = c$

✉ Un tel signal comporte *toutes les fréquences* avec la même densité. Par analogie avec la lumière blanche, on dénomme un tel signal **bruit blanc**

Processus indépendants

Deux processus aléatoires stationnaires $\hat{x}(t), \hat{y}(t)$ sont *indépendants* si leur densité de probabilité conjointe est égale au produit de les densités de probabilité marginale:

$$p_{xy}(x, y) = p_x(x)p_y(y) \quad (*)$$

✉ L'observation de l'un des processus ne nous apprend rien sur l'autre

✉ (*) $\rightarrow C_{xy}(\tau) = 0$: les processus indépendants sont non-corrélés!

✉ La réciproque n'est pas toujours vraie

Somme de variables aléatoires

densité de probabilité

$$\hat{z} = \hat{x} + \hat{y} \longrightarrow p_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{xy}(x, z-x) dx$$

si les processus sont indépendants: $p_{xy}(x,y) = p_x(x)p_y(y)$

$$\text{et } p_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_x(x)p_y(z-x)dx = [p_x(x) * p_y(x)](z)$$

variance

$$\sigma_z^2 = \dots = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2C_{xy}$$

si les processus sont non-corrélés: $\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$

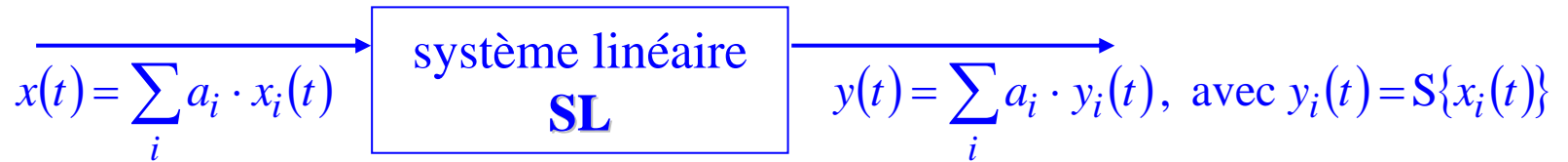
A) Introduction



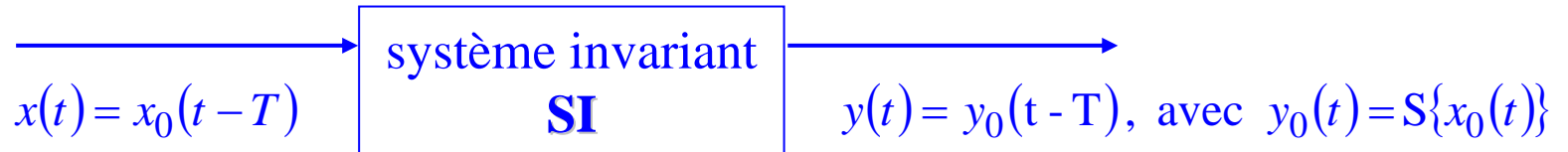
- ✉ **S** = un système physique délivrant un signal $y(t)$ en réponse à une stimulation $x(t)$
 - un système de mesure conçu pour détecter la présence d'un signal de forme particulière
 - un filtre électronique, un amplificateur, un convertisseur A/D, ...
 - un algorithme informatique agissant sur un signal numérique
 -
- ✉ Comment *décrire* la transformation temporelle ou fréquentielle qu'opère **S** sur le signal ?
- ✉ Comment concevoir **S** pour réaliser une opération particulière (filtrage, reconnaissance des formes, ...)? Le choix et la conception du *dispositif* (électronique, acoustique, optique,...) pour *réaliser* **S** ne fait pas parti du *traitement du signal*.
- ✉ Comment obtenir des *informations sur* **S** en observant les réponses du systèmes à des stimulations extérieures?

B) Systèmes linéaires et invariants (SLI)

Linéarité



Invariance



✉ **SLI** \Leftrightarrow $y(t)$ et $x(t)$ sont reliés par une équation différentielle *linéaire* à *coefficients constants*

✉ Sauf indication contraire, nous supposons par la suite que le système **S** est linéaire et invariant.



✉ [System Properties](#)

✉ [Interactive Lecture](#)

C) Réponse impulsionnelle

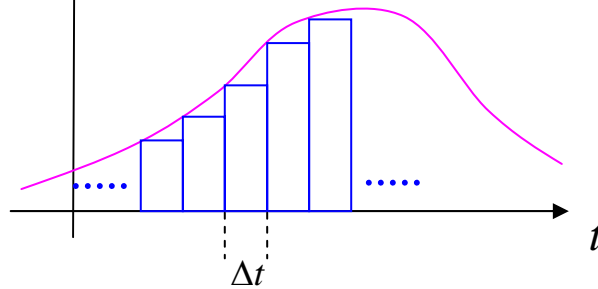
- ✉ description de **S** par l'intermédiaire de sa réponse à un signal extrêmement bref (impulsionnelle), à énergie *finie*. En cas de SLI, on pourra en déduire la réponse de **S** à un signal *quelconque*.
- ✉ Modélisation mathématique: réponse de **S** à une *impulsion de Dirac*.

Définition

Réponse impulsionnelle : $g(t) = \mathbf{S}\{\delta(t)\}$

- ✉ **S** est dit *causal* $\Leftrightarrow g(t < 0) = 0$
- ✉ Un signal quelconque peut être considéré comme une "succession" de signaux élémentaires impulsionnelles. En tenant compte de la linéarité et de l'invariance, la réponse du système est une suite de réponses impulsionnelles d'amplitude variable et décalées dans le temps.

Modélisation: $\tilde{x}(t)$ $x(t)$



→ $\tilde{x}(t)$ = suite d'impulsions de largeur Δt et
d'amplitude $x(k \cdot \Delta t)$, avec $k \in \mathbb{Z}$
 $\cong x(t)$ si Δt est suffisamment petit.

$$\longrightarrow \tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k \cdot \Delta t) \cdot \text{rect}\left[\frac{t - k \cdot \Delta t}{\Delta t}\right] \xRightarrow{\text{SLI}} \tilde{y}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k \cdot \Delta t) \cdot \Delta t \cdot \tilde{g}\left[\frac{t - k \cdot \Delta t}{\Delta t}\right]$$

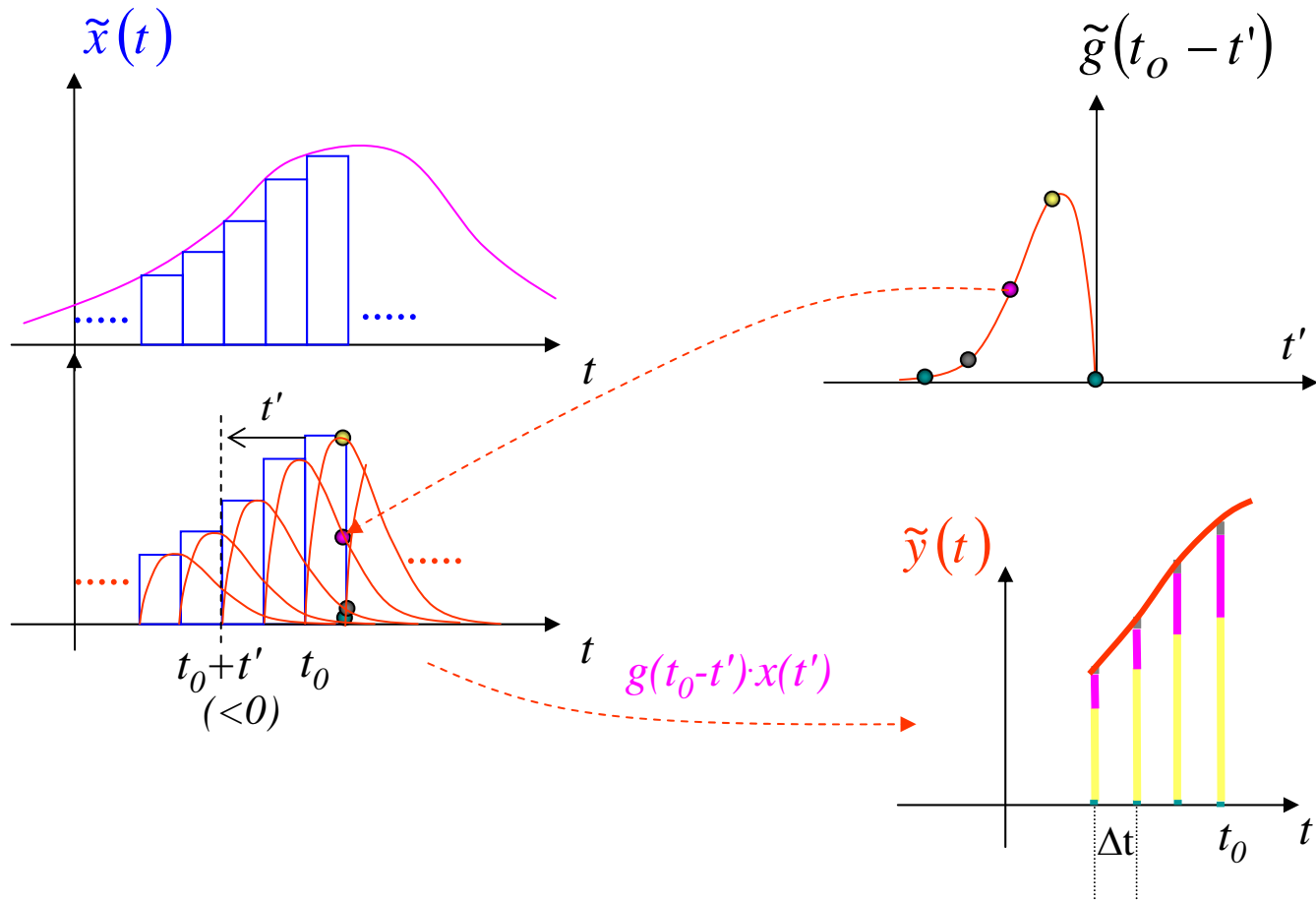
où $\tilde{g}(t) = S\left\{\frac{1}{\Delta t} \text{rect}\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\right\}$

Limite où $\Delta t \rightarrow dt'$: $\frac{1}{\Delta t} \cdot \text{rect}\left[\frac{t}{\Delta t}\right] \rightarrow \delta(t); \quad \tilde{g}(t) \rightarrow g(t); \quad \tilde{x}(t) \rightarrow x(t) \quad \text{et} \quad \tilde{y}(t) \rightarrow y(t)$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \dots \Delta t \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \dots dt' \quad \text{et} \quad k\Delta t \rightarrow t'$$

$$\longrightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t') \cdot g(t - t') \cdot dt' = [x * g](t) = [g * x](t)$$

Illustration:



D) Réponse fréquentielle

Définition

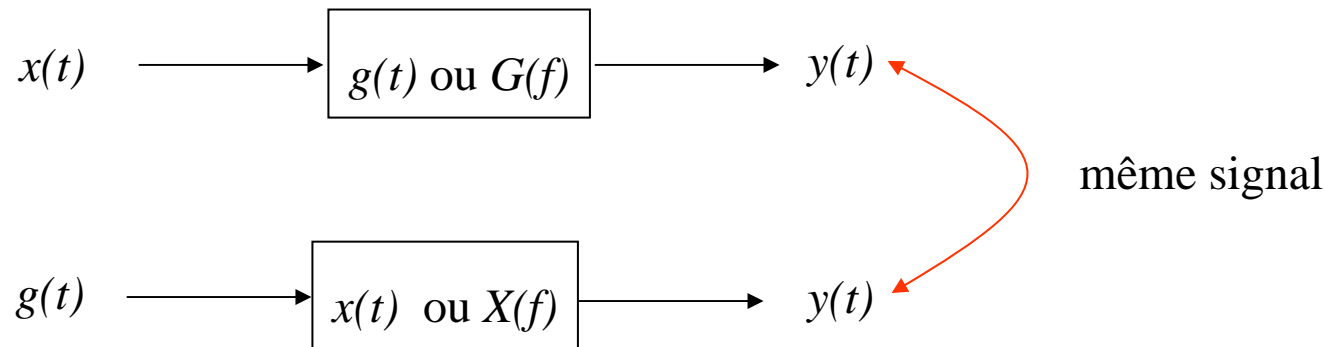
$$y(t) = [g * x](t) \leftrightarrow Y(f) = G(f) \cdot X(f)$$

où $g(t) \leftrightarrow G(f)$ = "réponse fréquentielle" de **S**.

(*)

✉ $G(f)$ ou $g(t)$ = description *complète* le **SLI**

✉ par commutation :



✉ La description des système SLI est analogue à celle des signaux (même outils math.)

✉ (*) décrit comment la distribution spectrale d'un signal est modifié ou "filtré" par **S**.

✉ Un SLI ne peut **créer** de nouvelles composantes spectrales: $X(f = f_o) = 0 \Rightarrow Y(f_o) = 0$

✉ $g(t)$ ou $G(f)$ permettent de calculer la réponse de S à un signal *quelconque*

✉ Un système est dit *causal* lorsque $g(t < 0) = 0 \rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^t x(t')g(t - t')dt'$

↓ le signal de sortie à l'instant t dépend du signal d'entrée aux instants $t' \leq t$

↓ la durée de $g(t)$ correspond au temps de réponse du système

✉ Si t est une coordonnée spatiale, alors $g(t)$ représente la réponse de S à un signal ponctuel

↓ objet ponctuel \longrightarrow SLI \longrightarrow objet flou

✉ Problème de *déconvolution*: connaissant $g(t)$ et $y(t)$ peut-on en déduire $x(t)$

[objet flou \rightarrow objet ponctuel]

↓ il s'agit d'une opération mathématique délicate où toute incertitude (même infime) sur $y(t)$ ou $g(t)$ se retrouve *amplifiée* dans le résultat

Régime harmonique $\longleftrightarrow x(t) = x_o \cdot e^{i2\pi f_o t} \leftrightarrow x_o \delta(f - f_o)$

$$\Rightarrow Y(f) = G(f) X(f) = G(f_o) \delta(f - f_o) x_o \leftrightarrow y(t) = x_o G(f_o) e^{i2\pi f_o t}$$

$$\Rightarrow y(t) = x_o |G(f_o)| e^{i(2\pi f_o t + \text{Arg}[G(f_o)])}$$



$|G(f)|$ = gain de **S**

$\text{Arg}[G(f)]$ = déphasage causé par **S**



E) Fonction de Transfert

Définition

On appelle *fonction de transfert* de **S** la transformée de Laplace $G_L(s)$ de sa réponse impulsionnelle

✉ pour les systèmes *causaux* : $G_L(s=i2\pi f) = G(f)$

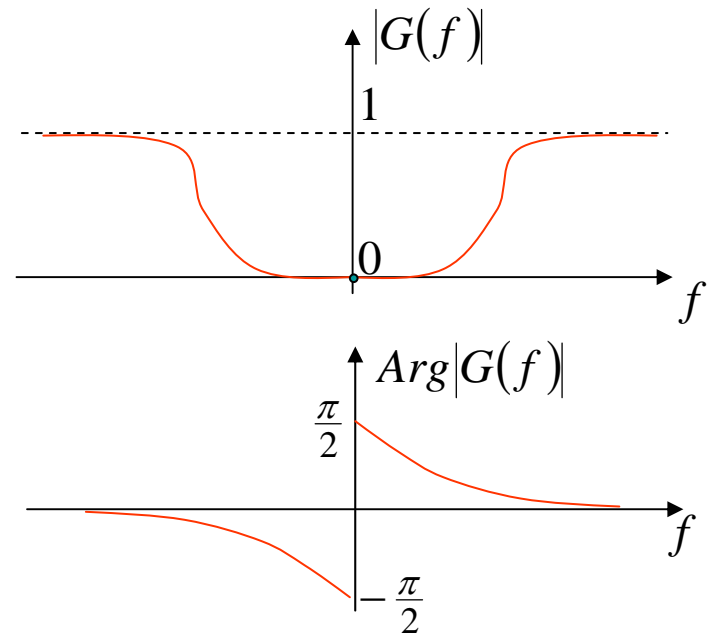
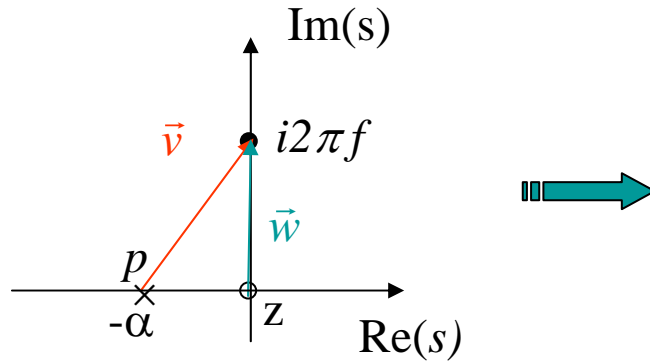
✉ pour simplifier l'écriture on notera la fonction de transfert $G(s)$

✉ Les SLI possèdent une fonction de transfert *rationnelle* (car ils sont décrits par des équations différentielles linéaires à coefficients constants)

✉ On peut caractériser la réponse fréquentielle du système par *les points singuliers* de sa fonction de transfert

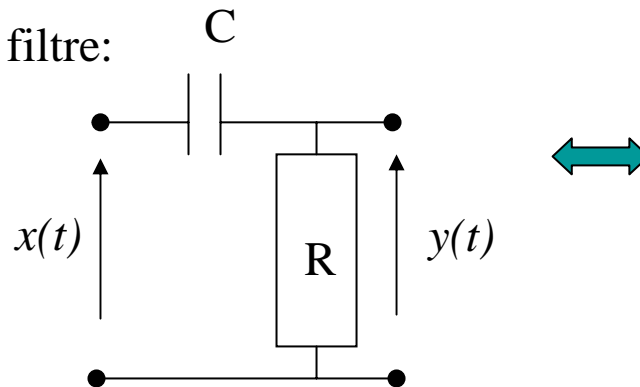
Exemple:

$$G(s) = \frac{s}{s + \alpha} \quad \text{avec } \alpha = \text{réel positif}$$



✉ il s'agit d'un *filtre passe-haut*

✉ *Réalisation possible du filtre:*



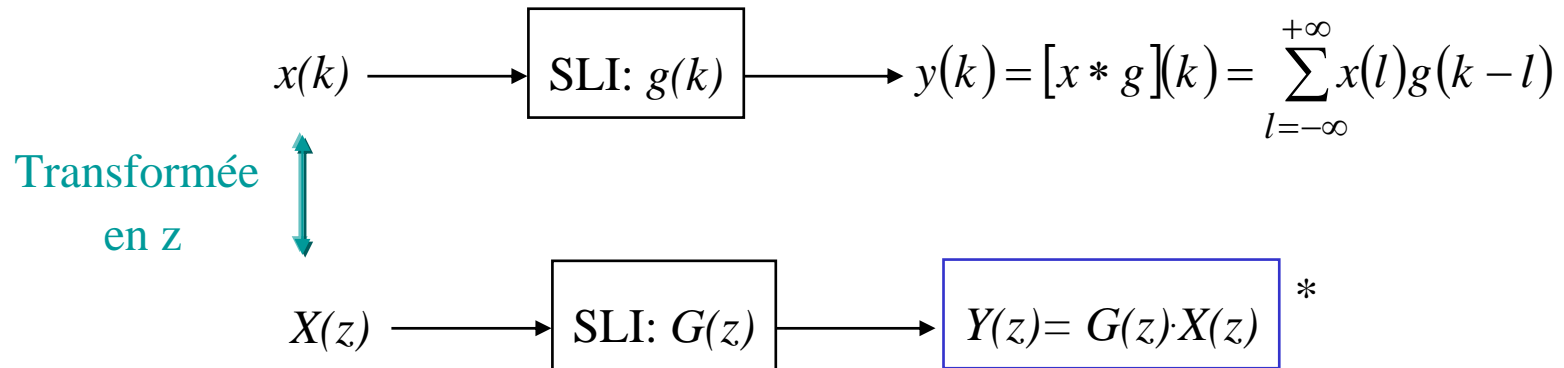
$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC} y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow G_L(s) = \frac{RC \cdot s}{RC \cdot s + 1}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{RC}$$

Système numérique

Définition La *fonction de transfert* d'un système *numérique* est la *transformée en z* de sa réponse impulsionnelle.

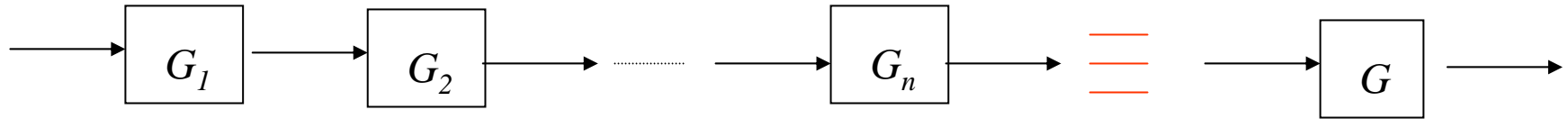


Exemple:

Block diagram for the example: Input $x(k)$ is processed by a block labeled $G(z) = z^{-1}$ to produce output $y(k) = x(k-1)$.

$$Y(z) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x(l-1)z^{-l} \stackrel{k=l-1}{=} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)z^{-(k+1)} = \underbrace{z^{-1}}_{G(z)} \cdot X(z)$$

Systèmes en cascades et Décomposition d'un système en éléments simples :



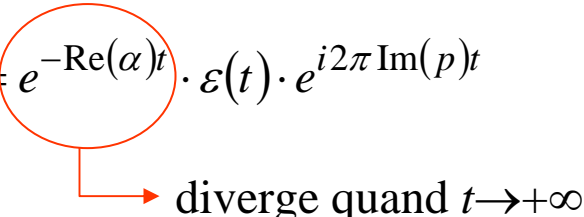
avec $G(s) = G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot \dots \cdot G_n(s) \Rightarrow$ points singuliers de $G = \Sigma$ (pts. singuliers des G_i)

Réciproquement, un SLI complexe peut être considéré comme une *succession* de systèmes élémentaires

Stabilité d'un SLI :

Un système n'est stable que si *tous les pôles* de $G(s)$ ont une *partie réelle négative*

En effet: $G(s) = \frac{1}{s - p} \Rightarrow g(t) = e^{-\text{Re}(p)t} \cdot \varepsilon(t) \cdot e^{i2\pi \text{Im}(p)t}$

 \rightarrow diverge quand $t \rightarrow +\infty$

✘ la moindre impulsion à l'entrée du système fait 'diverger' la sortie

✘ le système sort du *domaine linéaire*

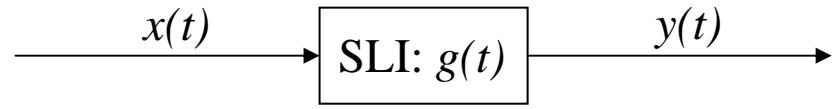
✉ Pour un système **numérique**, les pôles de $G(z)$ doivent être situés à l'intérieur du cercle unité, $|p| < 1$

✉ Tout système physique possède au moins autant de pôles que de zéros car :

$$|G(f)| \xrightarrow{f \uparrow} \propto \frac{f^m}{f^n} \quad \text{où } m \text{ et } n = \text{nombre de zéros et de pôles}$$

$$\text{si } m > n \quad |G(f)| \xrightarrow{f \rightarrow \infty} +\infty \quad \text{ce qui n'a pas de sens physique}$$

F) Convolution et corrélation



on a :
$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t')g(t-t')dt' = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t')g[-(t'-t)]dt'$$

en posant $\hat{g}(t) = g(-t)$, on peut écrire :
$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t')\hat{g}(t'-t)dt' \stackrel{!}{=} \varphi_{x\hat{g}}^{\circ}(-t)$$

$$[x * g](t) = \varphi_{x\hat{g}}^{\circ}(-t)$$

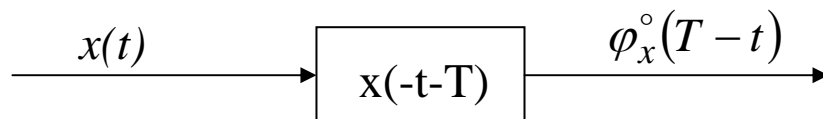
✉ les opérations de corrélation et convolution sont liées

✉ On peut considérer l'opération d'un SLI comme une mesure de la *corrélation* entre deux signaux ($x(t)$ et $g(t)$): le signal de sortie est "construit" à partir des composantes fréquentielles *communes* au signal d'entrée et à la réponse impulsionnelle.

Cas particulier: lorsque $g(t)=x(-t)$, $y(t)$ = fonction *d'autocorrélation* du signal

Ce type de système est connu sous le nom de *filtre adapté*.

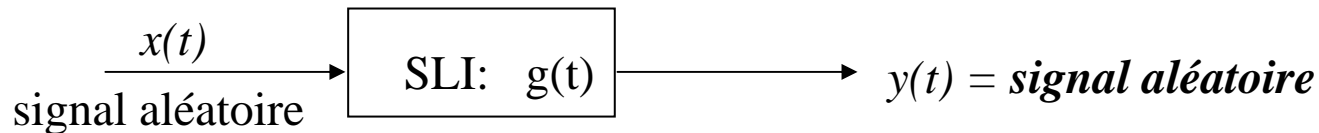
✉ ce filtre n'est pas causal; on doit retarder la réponse impulsionnelle de la durée T de $x(t)$



G) Densité spectrale et densité de probabilité

✉ Nous avons vu au chap I.6 que la densité spectrale de puissance $\phi_x(f)$ est un moyen efficace pour décrire la distribution spectrale des signaux aléatoires, pour lesquelles la transformée de Fourier est elle-même aléatoire.

✉ Comment $\phi_x(f)$ est-elle modifiée par un SLI ?



On peut toujours écrire formellement que $y(t) = g(t) * x(t)$

$$\text{or } \varphi_y(t) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t') y(t'+t) dt' \stackrel{\tau=-t'}{=} \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(-\tau) y(-\tau+t) d\tau = [y(-t) \overset{\text{déf}}{*} y(t)]$$

$$\Rightarrow \varphi_y(t) = [[g * x](-t) \overset{*}{*} [g * x](t)](t)$$

Note: $*, \overset{*}{*}$ = opérateur commutatifs et associatifs (s.d.)

↓

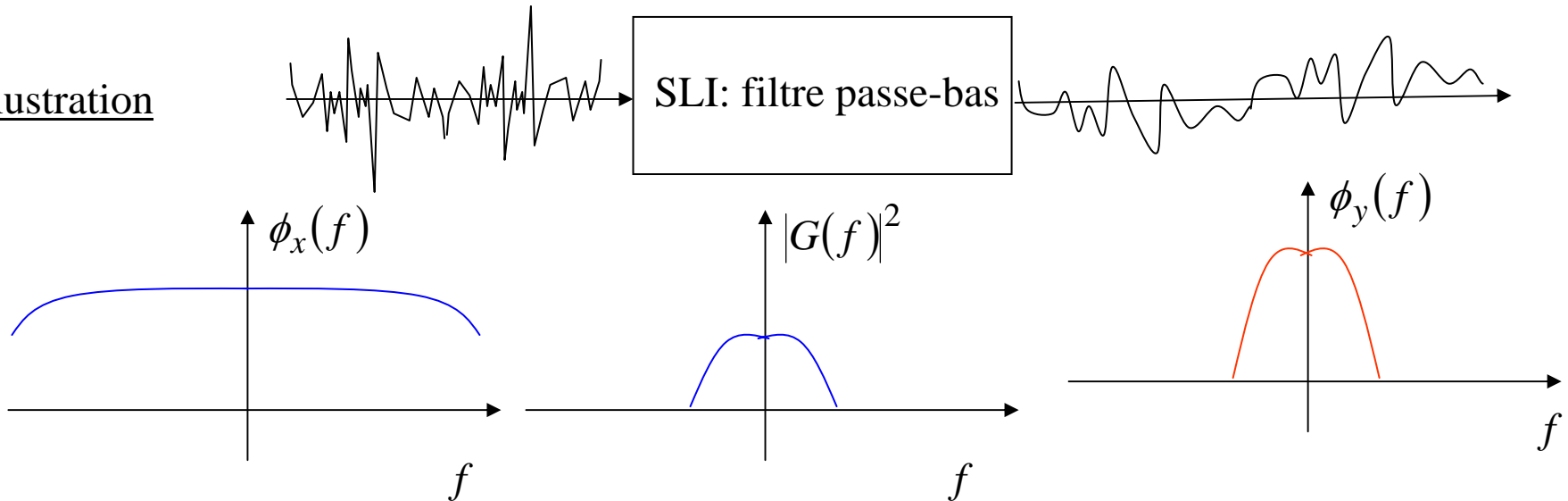
Produit de convolution
pour signaux à puissance
moyenne finie

$$\Rightarrow \varphi_y(t) = \underbrace{[g(-t) * g(t)]}_{\varphi_g^\circ(t)} * \underbrace{[x(-t) \bar{*} x(t)]}_{\varphi_x(t)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi_y(t) = \varphi_g^\circ(t) * \varphi_x(t) \quad \longleftrightarrow \quad \phi_y(f) = |G(f)|^2 \cdot \phi_x(f)}$$

✉ ce résultat est *indépendant* de la nature *aléatoire ou déterministe* du signal

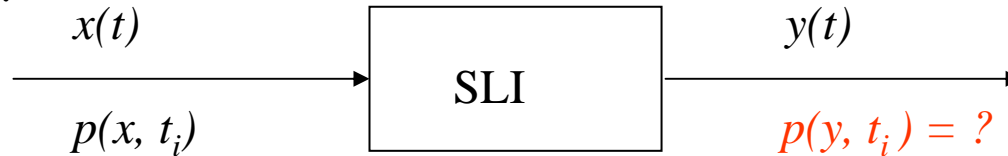
Illustration



✉ possibilité de *mesurer* $|G(f)|$ par la réponse d'un système à un bruit blanc!

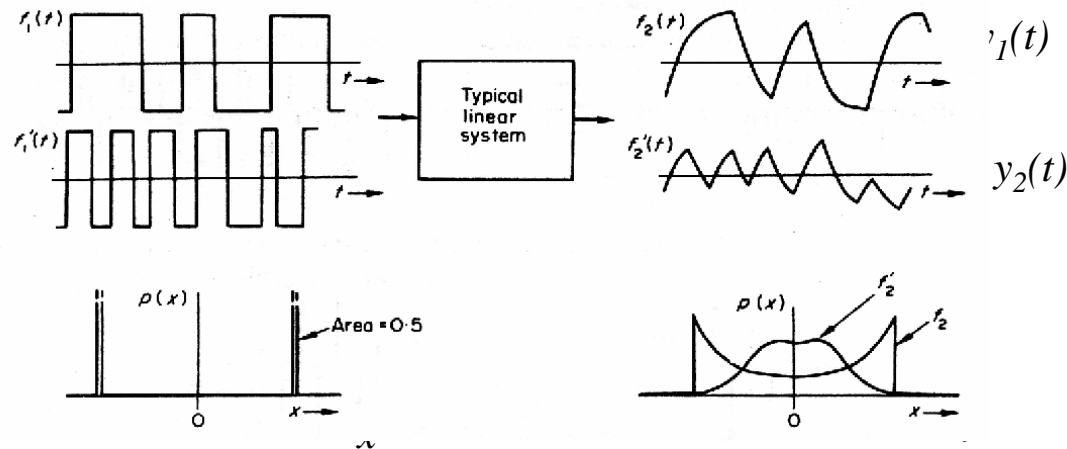
Densité de probabilité

✉ Le traitement par un SLI affecte la densité de probabilité, $p(x, t_i)$, qui caractérise le signal aléatoire.



✉ Il s'agit d'un problème difficile qui ne possède pas de solution générale. Ainsi pour un *même* SLI, $p(y, t_i)$ peut être différente pour deux signaux $x(t)$ de *même* $p(x, t_i)$!

Exemple:



[Fig. 7.23 (II)]

Valeur et Puissance moyennes

La *valeur moyenne temporelle* d'un signal est par définition égale à sa composante continue, c'est-à-dire au terme de fréquence nulle de sa transformée de Fourier $X(f=0)$

D'où la relation suivante entre les valeurs moyennes des signaux d'entrée et de sortie d'un SLI :

$$\overline{y(t)} = Y(0) = G(0) \cdot X(0)$$

Les *puissances moyennes* des deux signaux sont reliées par:

$$P_y = \varphi_y(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_y(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} |G(f)|^2 \phi_x(f) df$$

II.2 Détection et Estimation des signaux

A) Introduction

Détection d'un signal = déceler ou détecter la *présence* d'un signal particulier 'contenu' dans un signal bruité, *sans* retrouver la *forme exacte* (supposée connue) du signal

Estimation d'un signal = détecter la *présence et estimer la forme* d'un signal particulier noyé dans le bruit

- ✉ La complexité du problème dépend des *connaissances à priori* du signal recherché
- ✉ On utilisera la notation adaptée aux signaux analogiques. Les méthodes décrites ci-dessous peuvent être adaptées aux signaux numériques.
- ✉ Par analogie avec l'acoustique, on appelle "Bruit" tout signal indésirable limitant l'intelligibilité d'un signal utile.

Hypothèses :

↓ bruit *additif* $\leftrightarrow x(t) = s(t) + b(t)$

↙ ↘
signal 'utile' bruit

↓ le bruit est issue d'un processus *ergodique, indépendant* du signal utile

→ $\varphi_{sb}^{\circ}(\tau) = 0, \quad \forall \tau$

↓ Le signal utile et le bruit sont issue de processus *centrés*

→ $\mu_s = \mu_b = 0$

↓ le temps de corrélation τ_b ou mémoire du bruit est *fini*

→ $\varphi_b(|\tau| > \tau_b) = 0$

B) Détection d'un signal périodique

✉ On recherche un signal *périodique* dont on *ne connaît pas* la période

Principe On réalise *l'autocorrélation* du signal



$$\begin{aligned}\text{On peut écrire : } \varphi_x(\tau) &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [s(t) + b(t)][s(t + \tau) + b(t + \tau)] dt \\ &= \varphi_s(\tau) + \underbrace{\varphi_{sb}(\tau)}_{=0} + \underbrace{\varphi_{bs}(\tau)}_{=0} + \underbrace{\varphi_b(\tau)}_{=0 \text{ pour } \tau > \tau_b}\end{aligned}$$

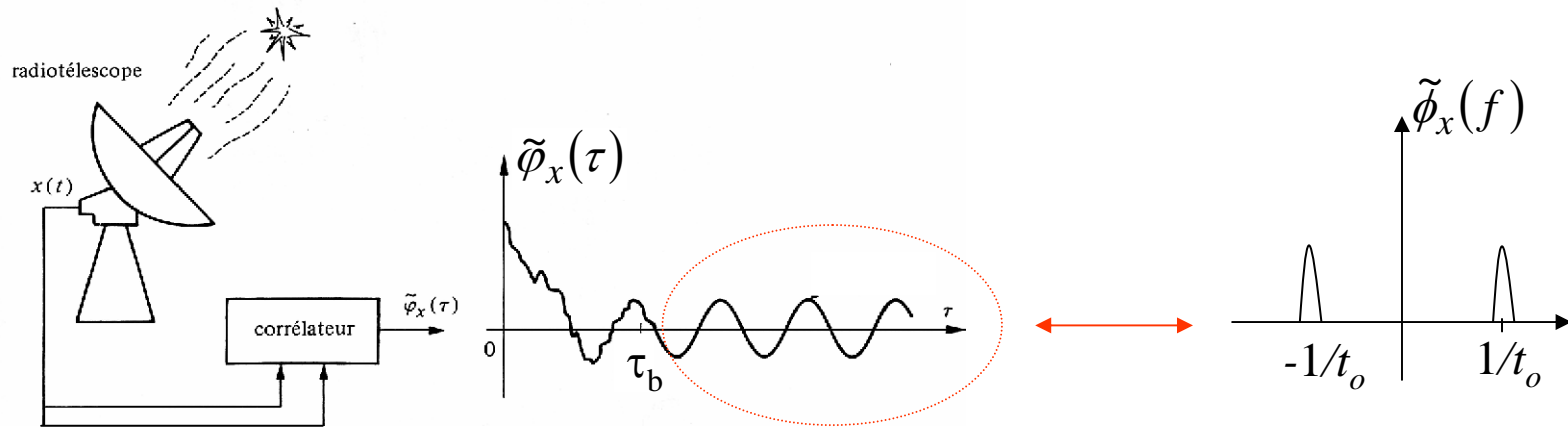
➡ pour $\tau > \tau_b$: $\varphi_x(\tau) = \varphi_s(\tau)$ = fonction périodique de **même** période que $s(t)$

➡ Puissance moyenne de $s(t)$: $P_s = \varphi_x(n t_o > \tau_b)$, où t_o = période de $s(t)$

$\boxtimes T = \text{finie} \Rightarrow \text{le corrélateur mesure : } \tilde{\varphi}_x(\tau) = \frac{1}{T} \int_T x(t)x(t+\tau)dt$
 $\Rightarrow \text{les termes } \varphi_{sb} \text{ et } \varphi_{bs} \text{ ne sont pas rigoureusement nuls}$
 $\Rightarrow \varphi_b(\tau > \tau_b) \approx 0$

} limitent le rapport
 signal sur bruit

Illustration

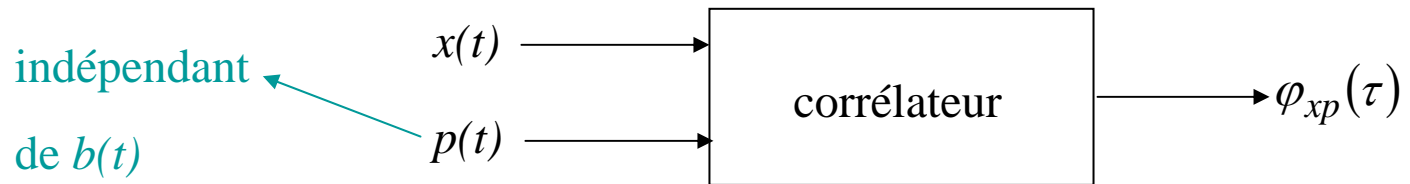


[Fig.13.21 (I)]

C) Détection d'un signal périodique de période connue

L'information *a priori* sur la période permet en principe d'améliorer le rapport signal sur bruit

Principe On réalise *l'intercorrrelation* du signal avec un signal *auxiliaire* $p(t)$ de même période mais de forme *quelconque*.



$$\Rightarrow \varphi_{xp}(\tau) = \varphi_{sp}(\tau) + \underbrace{\varphi_{bp}(\tau)}_{=0} = \varphi_{sp}(\tau)$$

A teal arrow points from the term $\varphi_{sp}(\tau)$ to the text "fonction périodique de même période que $s(t)$ ".

⊗ il n'y a pas de limitation aux faibles valeurs de τ

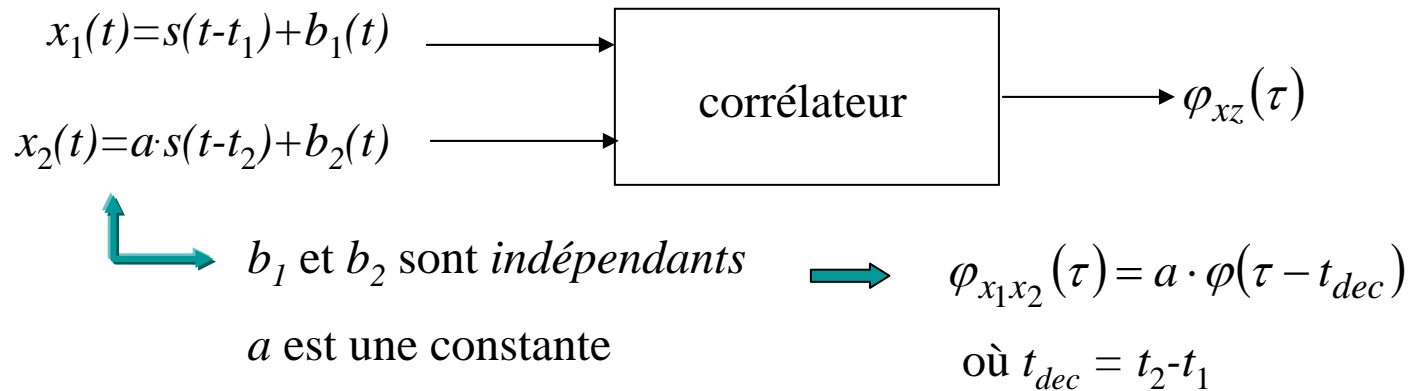
⊗ φ_{sb} est l'*unique* terme supplémentaire \Rightarrow augmentation du rapport signal/bruit

⊗ $p(t)$ est de forme *quelconque* \Rightarrow facilité d'emploi

D) Mesure du retard entre signaux de forme quelconque

Lorsque deux signaux, $x_1(t)$ et $x_2(t)$, comporte le même signal utile, $s(t)$, mais décalé dans le temps, la comparaison de $x_1(t)$ et $x_2(t)$ permet d'estimer ce décalage temporelle.

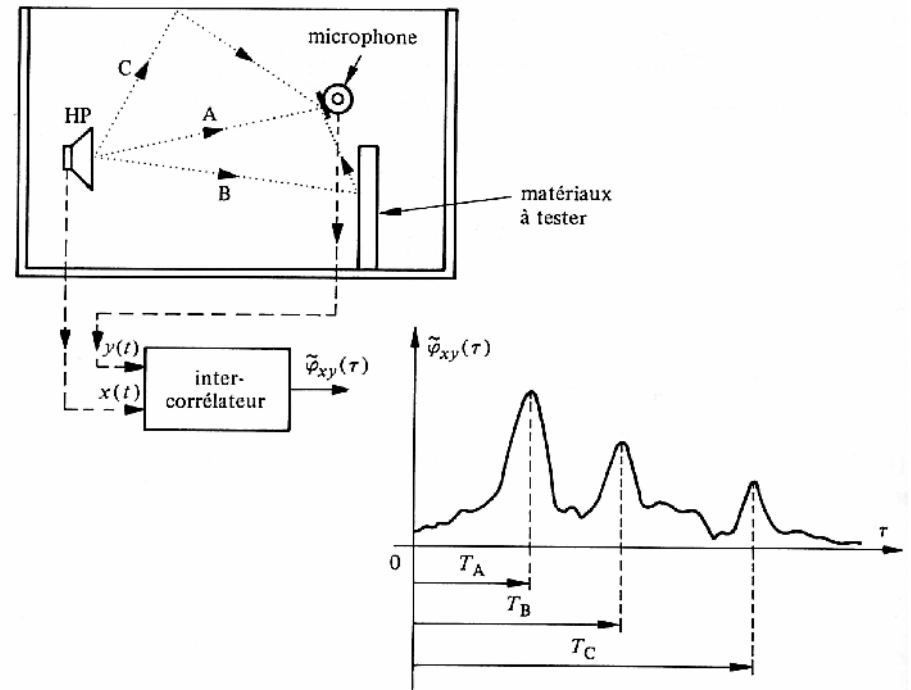
Principe



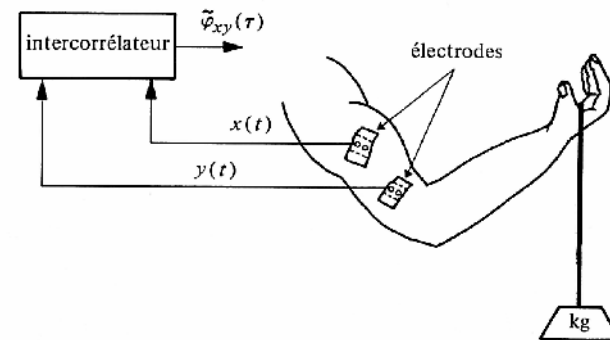
✉ si $s(t)$ est de forme connue, cette opération est équivalent à un *filtrage adapté*

Illustrations

a) Mise en évidence de différents chemins de propagation et mesure de leurs coefficients d'absorption



b) L'intercorrélation des signaux provenant d'électrodes placées sur un muscle permettent de détecter si les cellules musculaires travaillent de manière cohérente

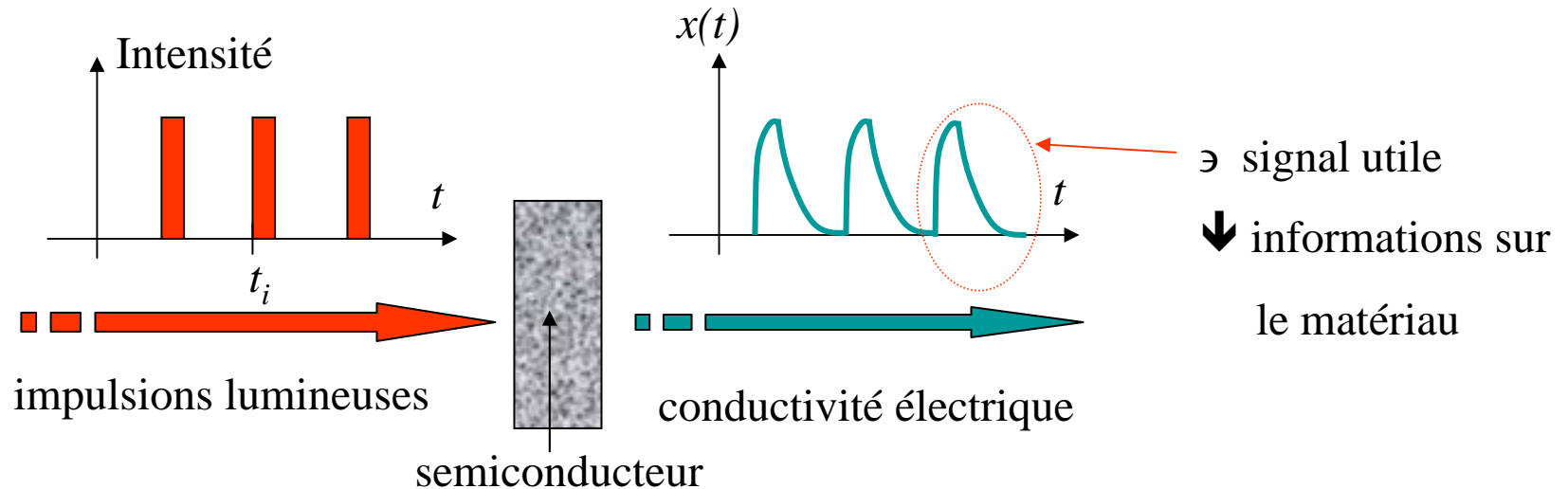


[Fig.13.16,17 (I)]

E) Estimation d'un signal par intercorrélation synchrone

✉ En Physique on étudie souvent la réponse d'un système à une stimulation *périodique*

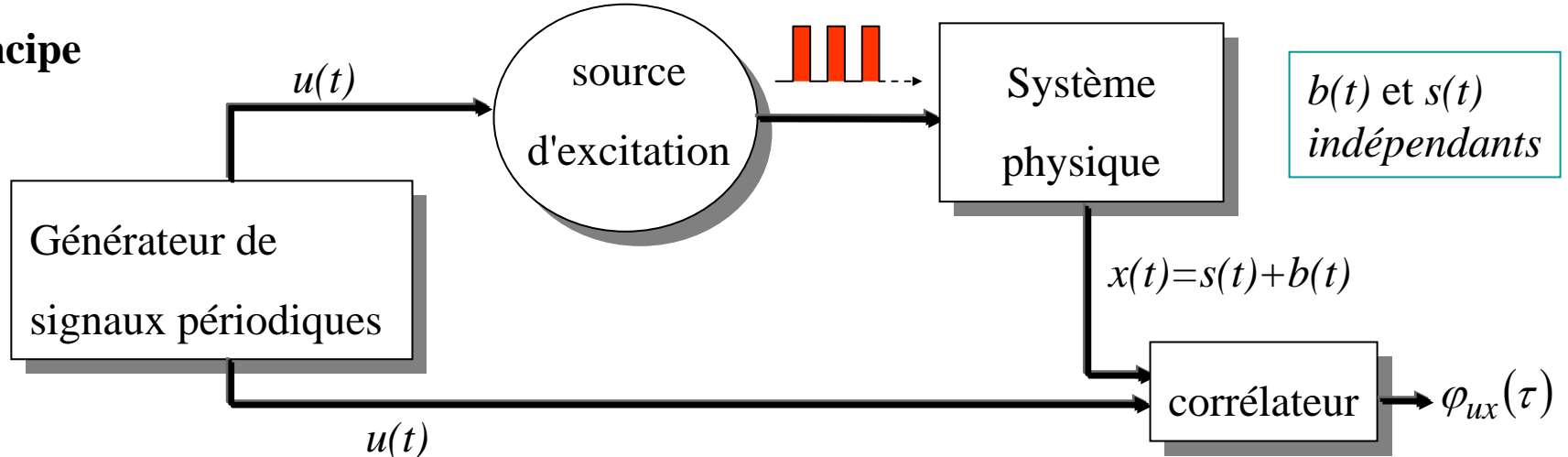
Exemple :



✉ La méthode décrite dans ce paragraphe exploite la nature répétitive du procédé.

Stimulation périodique $\rightarrow x(t) = s(t) + b(t)$ avec $s(t+mt_o)=s(t)$, $m \in \mathbb{Z}$

Principe



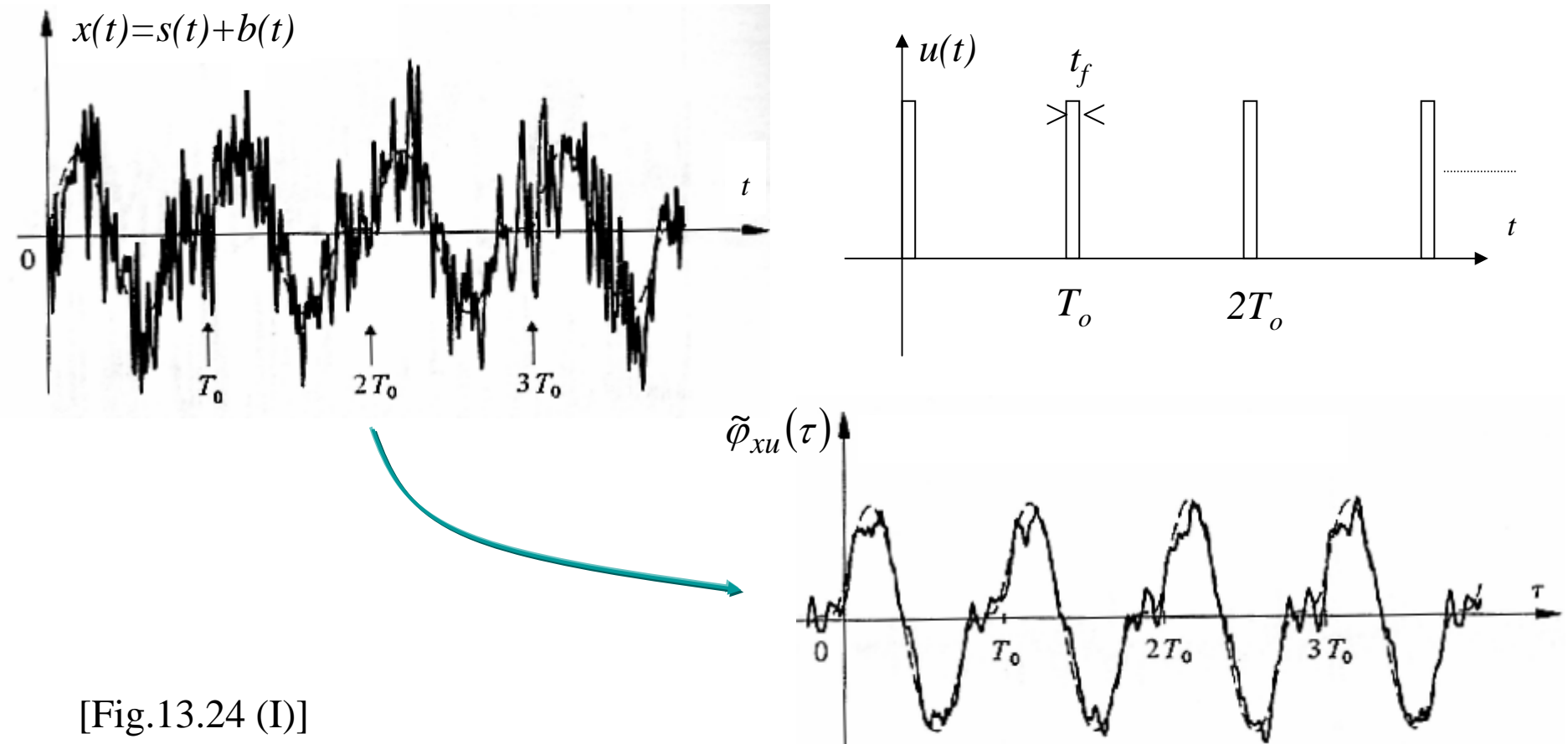
synchronisé avec $s(t)$ \rightarrow

$$\rightarrow \varphi_{ux}(\tau) = \varphi_{us}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t)s(t+\tau)dt = \frac{1}{T_o} \int_{-\frac{T_o}{2}}^{\frac{T_o}{2}} u(t)s(t+\tau)dt$$

$u(t)s(t+\tau)$ = périodique de période T_o

pour $u(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t_f} \text{rect}\left(\frac{t-nT_o}{t_f}\right)$ avec $t_f < T_o \Rightarrow \varphi_{ux}(\tau) = \frac{\overline{s(\tau)}}{T_o}$ \rightarrow moyenne temporelle de $s(t)$ sur $[\tau-t_f/2, \tau+t_f/2]$

Illustration

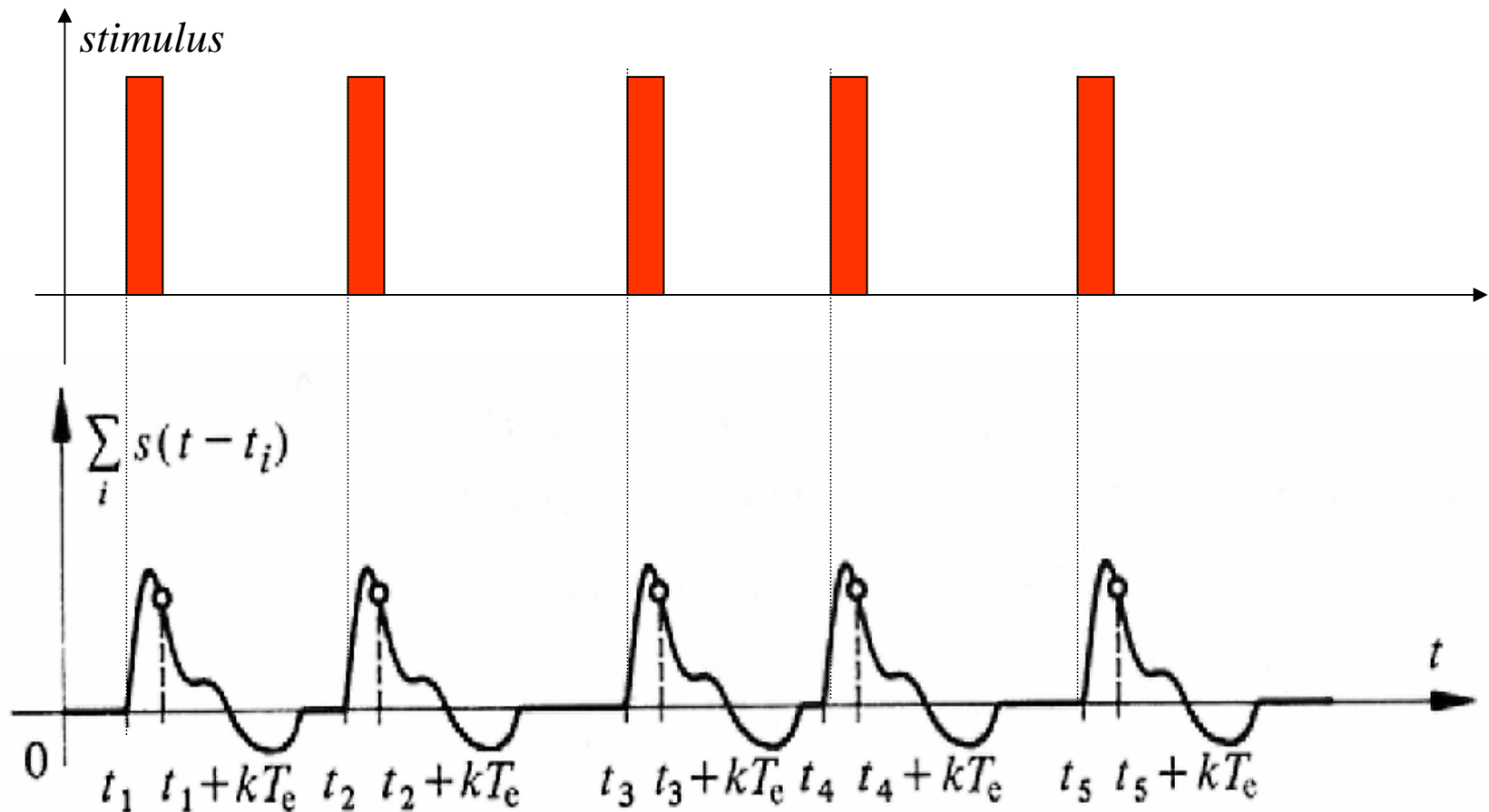


[Fig.13.24 (I)]

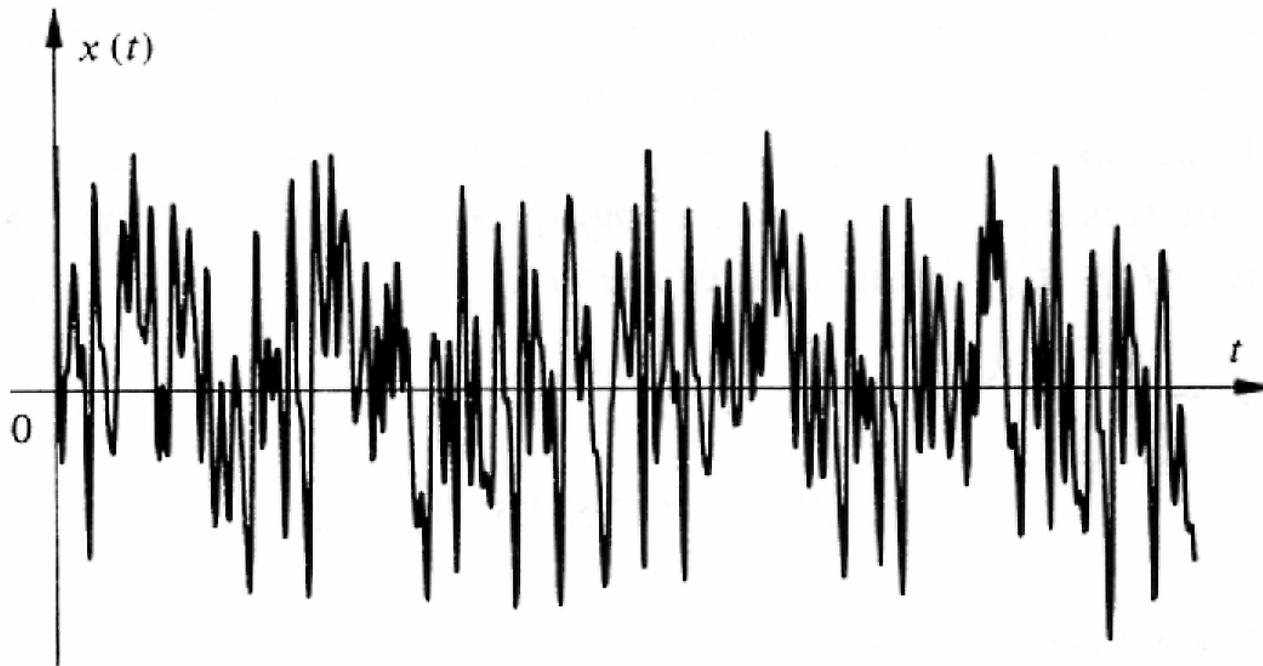
idéalisation $t_f \rightarrow 0 \Rightarrow u(t) \rightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nt_o)$ et $\varphi_{ux}(\tau) = \frac{s(\tau)}{t_o}$

F) Estimation par accumulation

✉ Il s'agit d'une méthode numérique : la réponse $x(t-t_i)$ d'un système à une stimulation à l'instant t_i est *échantillonnée* aux instants t_i+kT_e , $k=1,...,N$, et stocké dans N mémoires numériques. Les N valeurs sont moyennées avec les mesures précédentes.



[Fig.13.13 (I)]



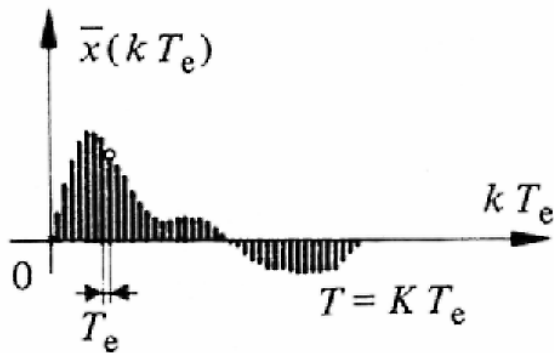
Contenu de la $k^{\text{ième}}$ mémoire après la $i^{\text{ième}}$ mesure:

$$\overline{x_i(kT_e)} = \frac{x_i(kT_e) + (i-1)\overline{x_{i-1}(kT_e)}}{i}$$

Après M mesures :

$$\overline{x(kT_e)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^M x_i(kT_e) = s(kT_e) + \bar{b}$$

avec $\bar{b} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M b_i(kT_e) \approx 0$



[Fig.13.13 (I)]

Ecart - type

\bar{b} = composante aléatoire de $\overline{x(kT_e)}$

$$\rightarrow \sigma_{\bar{x}}^2 = \sigma_b^2 = \text{variance} \left\{ \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M b_i(kT_e) \right\}$$

hypothèse: ... b_{i-1}, b_i, b_{i+1} ... = variables aléatoires *indépendantes* de variance σ_b^2

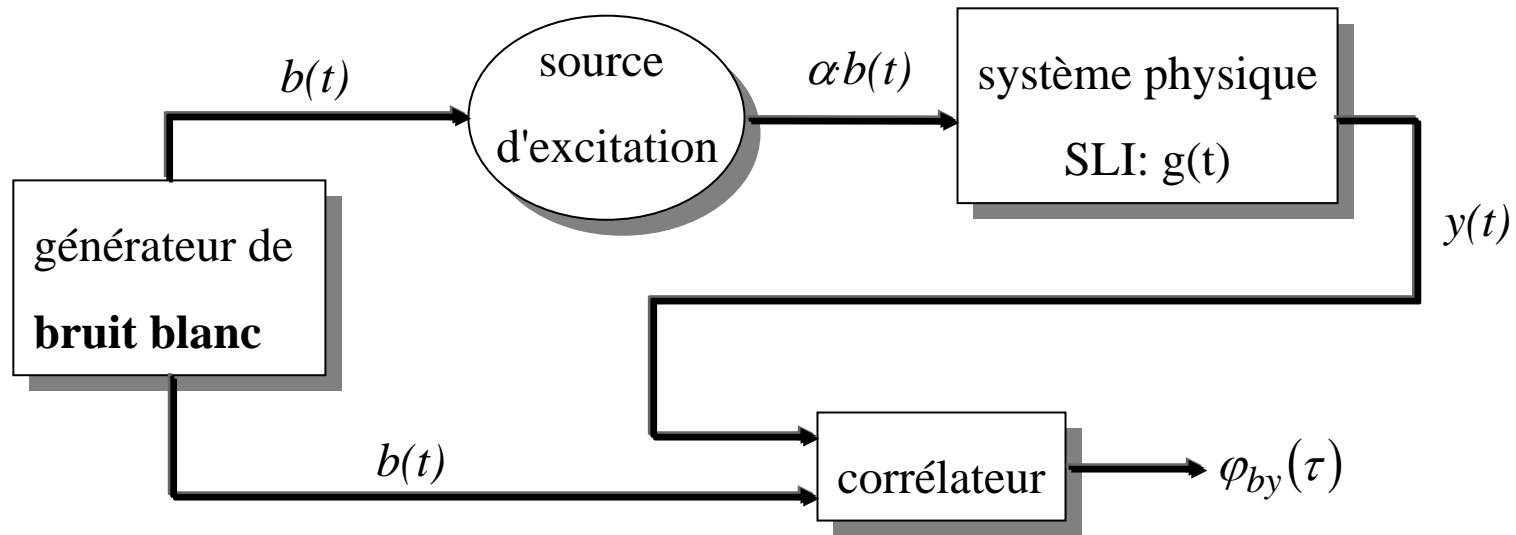
$$\rightarrow \sigma_b^2 = \sum_{i=1}^M \sigma_b^2 \quad \text{d'où} \quad \boxed{\sigma_x = \frac{\sigma_b}{\sqrt{M}}}$$

✉ pour augmenter le rapport signal/bruit d'un facteur K il faut multiplier le nombre de mesure par K^2 .

G) Estimation de la réponse impulsionnelle par corrélation

- ✉ En première approximation, les *systèmes physiques* ont un comportement *linéaire* à condition que les excitations aient une énergie suffisamment *faible*.
- ✉ L'invariance temporelle est synonyme d'absence de vieillissement ou d'usure du système.
- ✉ Dans ces conditions on peut caractériser un système physique par ses réponses impulsionnelle $g(t)$, fréquentielle $G(f)$ ou par sa fonction de transfert $G_L(s)$.
- ✉ $g(t)$ véhiculent des informations physiques sur le système en régime linéaire (temps de réponse, stabilité, phénomènes de résonances,).
- ✉ $g(t)$ peut dépendre du point de *fonctionnement statique* du système.
- ✉ L'énergie du signal impulsionnel, utilisé pour estimer $g(t)$, doit être choisi de manière à rester dans le domaine linéaire. Pour certains systèmes cette condition peut limiter considérablement le rapport signal sur bruit. La méthode corrélatrice, utilisant comme signal d'excitation un bruit blanc, peut contourner cette difficulté.

Méthode corrélative



or $\varphi_{by}(\tau) = [\hat{b} * y](\tau)$, où $\hat{b}(t) = b(-t)$

$$= [\hat{b} * (\alpha \cdot b * g)](\tau) = \alpha [(\hat{b} * b) * g](\tau)$$

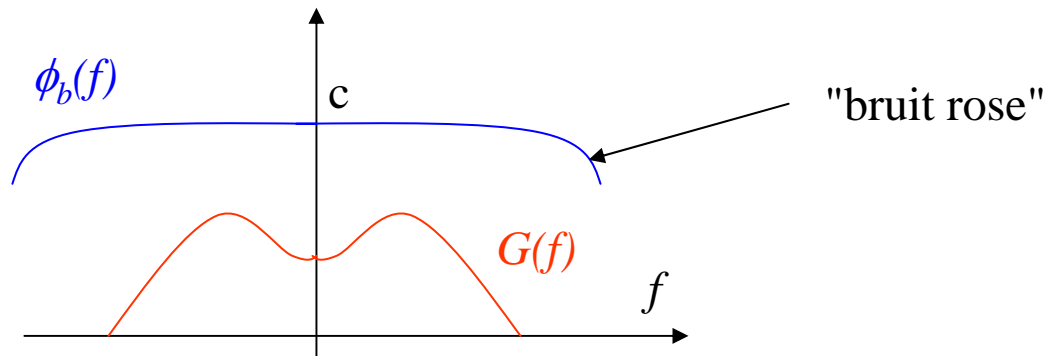
$$= \alpha \cdot [\varphi_b * g](\tau)$$

\uparrow
 Bruit blanc: $\varphi_b(\tau) = \delta(\tau) \longleftrightarrow \phi_b(f) = 1$

$$\Rightarrow \varphi_{by}(\tau) = \alpha \cdot g(\tau) \longleftrightarrow \Rightarrow \phi_{by}(f) = \alpha \cdot G(f)$$

☒ Un bruit blanc est physiquement irréalisable.

☒ Il suffit que $\phi_b(f) \approx c$ aux fréquences où $G(f)$ est *non-négligeable*



☒ on a souvent recours aux générateurs numériques de bruit *pseudo-aléatoire*

☒ Rapport Signal / bruit :

Méthode impulsionnelle

$$x(t) = A \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right), \text{ avec } T \text{ petit}$$

A faible afin de rester dans le

domaine linéaire

→ **limitation** de l'énergie du signal

d'entrée $W = A^2 T$

Méthode corrélatrice

σ_b^2 = puissance moyenne du bruit

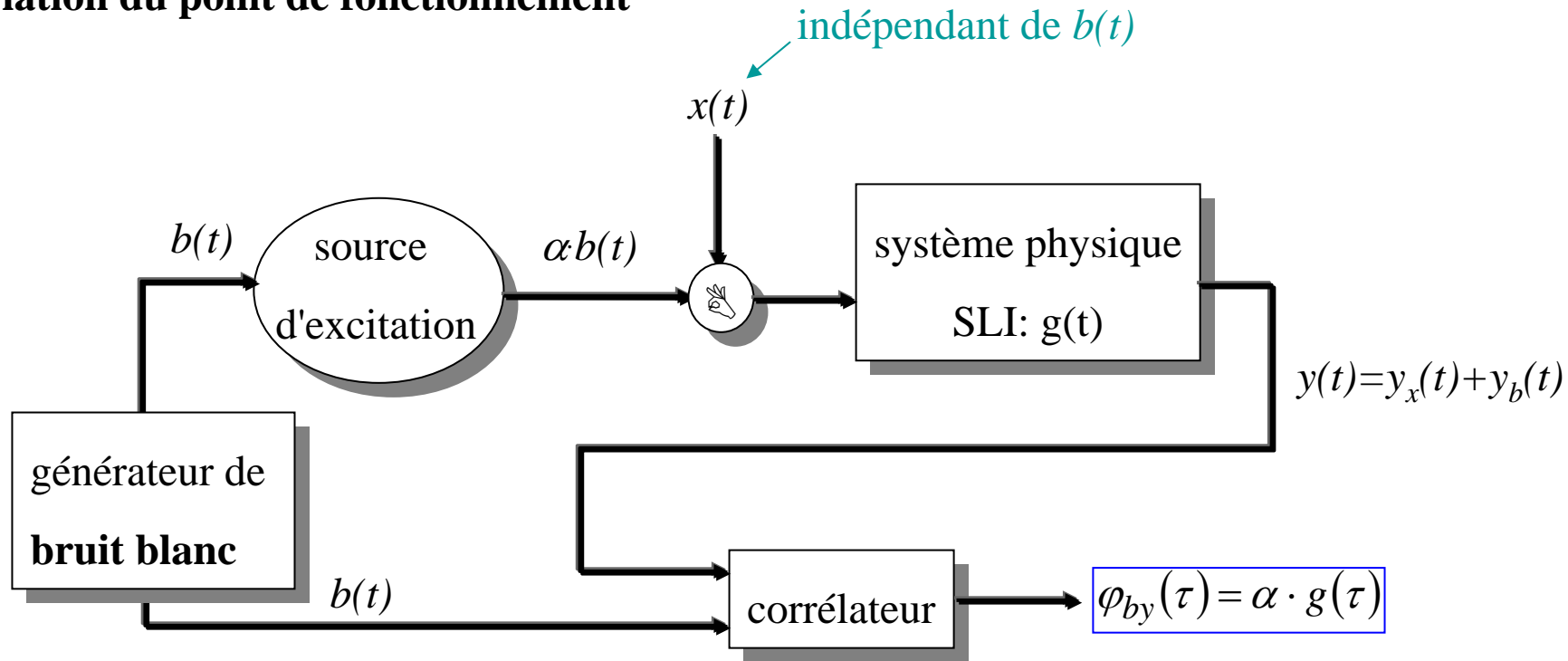
D = durée d'intégration (finie) de l'intégrateur

Energie du signal d'entrée "utilisée":

$$W = \sigma_b^2 \cdot D$$

☒ pas de limitation intrinsèque sur W

Variation du point de fonctionnement



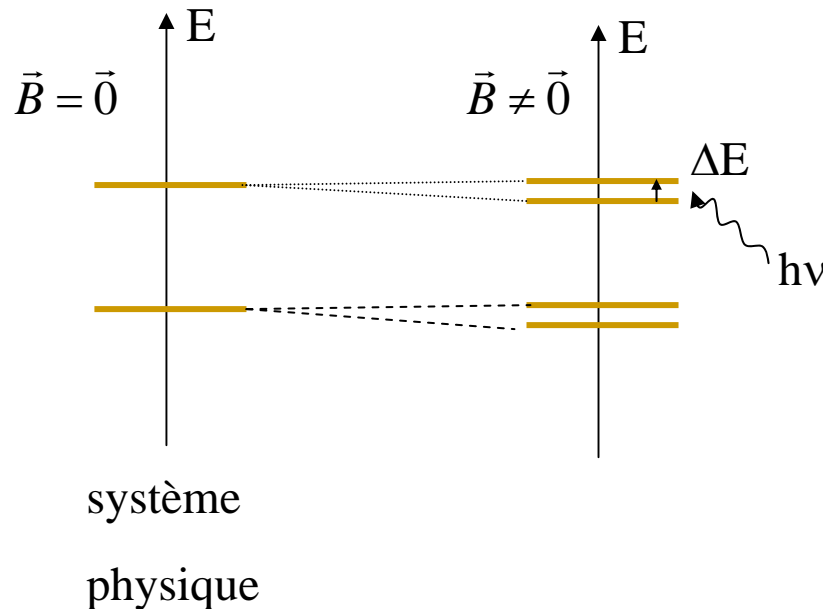
En effet $\varphi_{by}(\tau) = \underbrace{\varphi_{by_x}(\tau)}_{=0} + \varphi_{by_b}(\tau) = \alpha g(\tau)$
 car b et y_x *indépendant*

☒ $x(t)$ modifie le point de fonctionnement du système physique

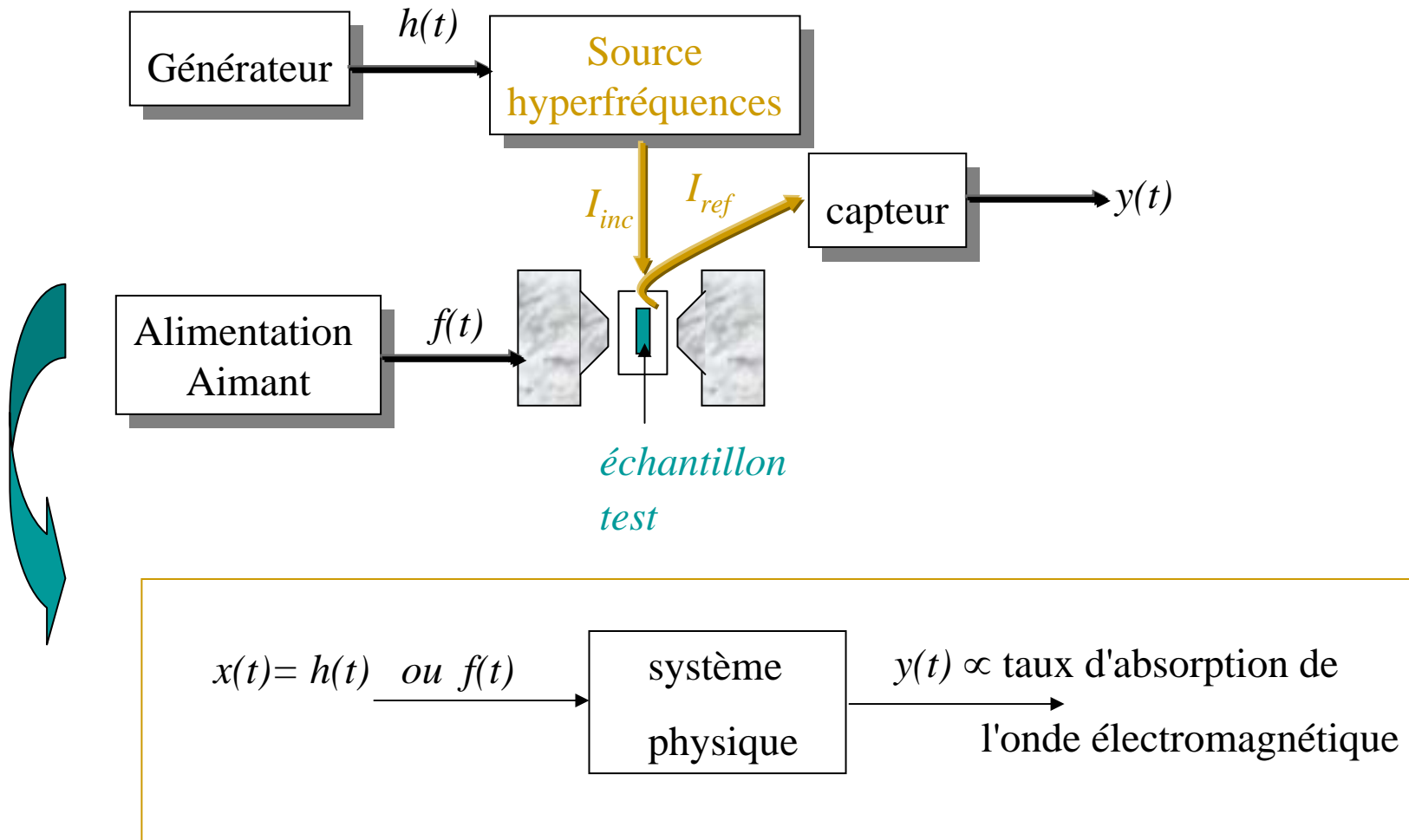
Exemple: Résonances Magnétiques

Principe:

- ↓ Le système physique est caractérisé par une série de *niveaux d'énergie*
- ↓ Levée de dégénérescence sous champ magnétique
- ↓ Absorption d'une onde électromagnétique
- ↓ Il y a résonance lorsque l'énergie des photons coïncide avec la différence énergétique entre deux états quantiques (électronique ou nucléaire): $\Delta E = h\nu$



Modélisation



Méthode directe : ↓ Intensité et fréquence de l'onde constante

↓ variation lente du champ magnétique

↓ $x(t)=f(t)$

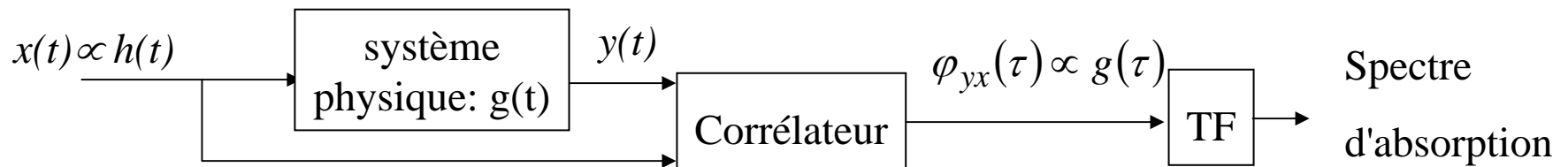
↓ *Inconvénient*: Temps de mesure relativement élevé

Méthode corrélatrice :

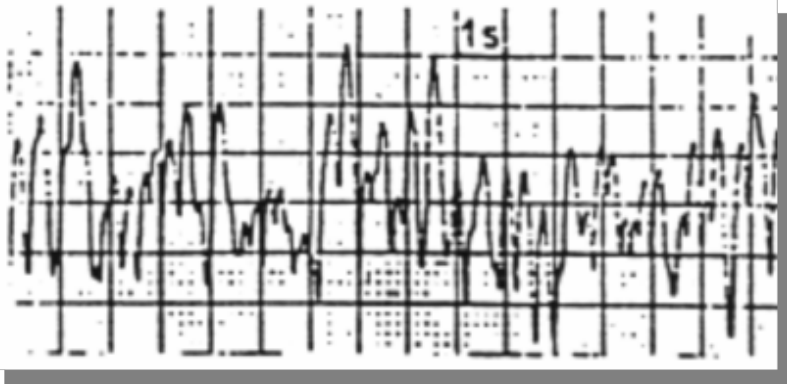
↓ Champ magnétique fixe

↓ L'intensité de l'onde est aléatoire et à large bande spectrale (\approx bruit blanc)

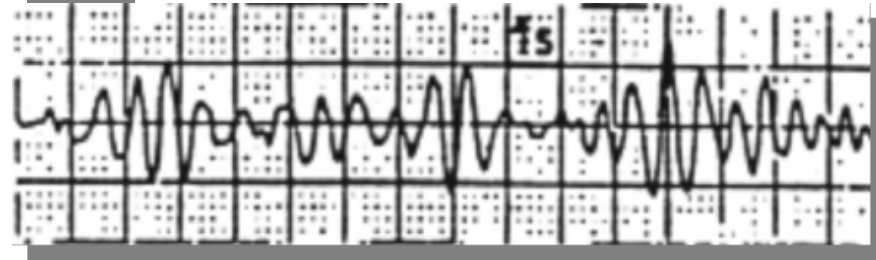
↓ Mesure de la réponse fréquentielle du système par intercorrélation du signal d'absorption et du signal aléatoire $h(t)$ + transformée de Fourier



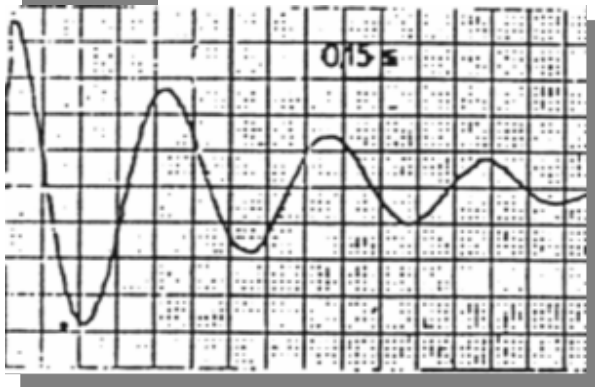
$h(t)$



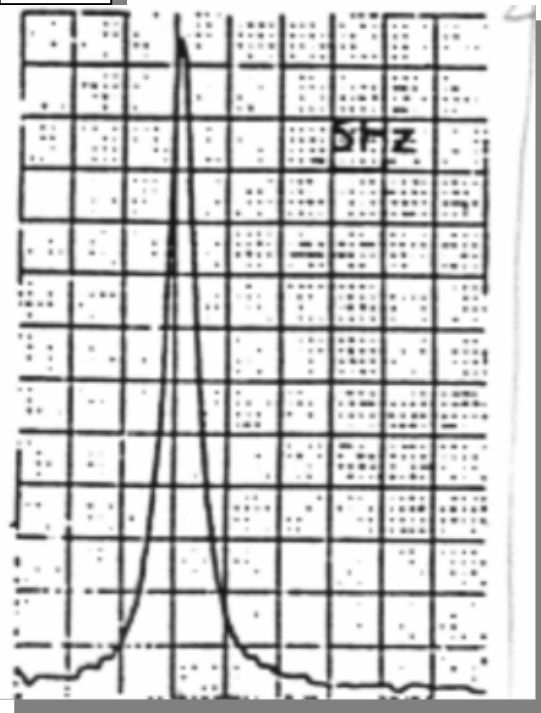
$y(t)$



$\tilde{\varphi}_{yh}(\tau)$



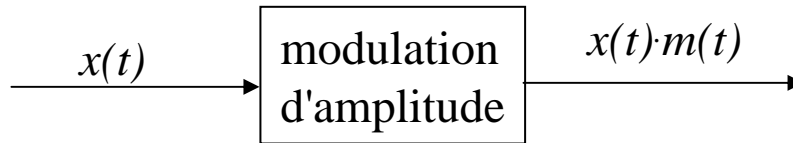
$G(f)$



II.3 Modulation et détection synchrone

A) Modulation

✉ On parle de *modulation d'amplitude* lorsqu'un signal $x(t)$ est *multiplié* par un signal auxiliaire $m(t)$ (signal de modulation).



✉ La modulation d'amplitude est utilisée pour:

- ↓ transposition du signal dans une bande de fréquence particulière (*multiplexage* des ondes radios)
- ↓ réaliser une conversion Analogue/Numérique (*échantillonnage*)
- ↓ augmenter le rapport signal / bruit en détection et estimation des signaux (*détection synchrone*)

✉ La modulation d'amplitude n'est *pas* une opération *invariante*.

✉ D'autres types de modulation (modulation de fréquence, de phase) existent mais ne seront pas traités dans ce chapitre.

En cas de modulation d'amplitude on peut écrire :

$$x_m(t) = x(t) \cdot m(t) \leftrightarrow X_m(f) = X(f) * M(f)$$

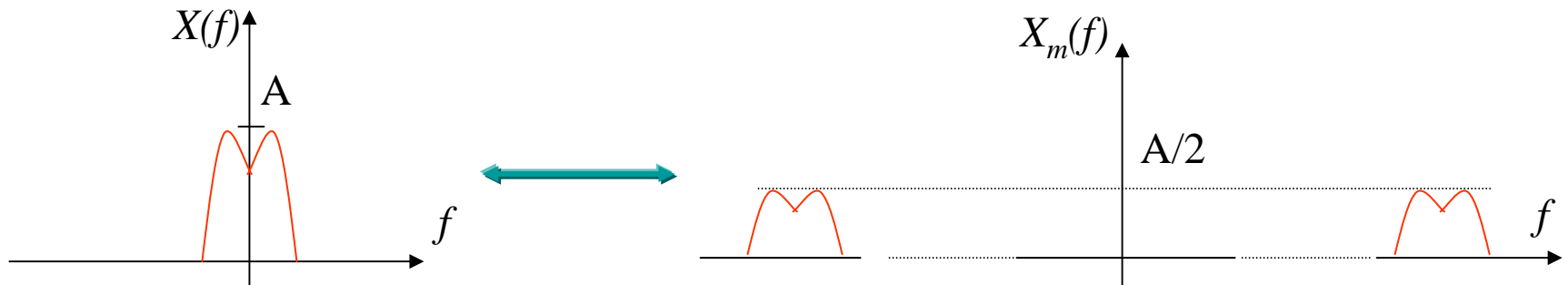
☒ Dans l'espace des *fréquences* la modulation d'amplitude est équivalente à un SLI!

Modulation par un signal sinusoïdale

$$m(t) = \cos(2\pi f_m t) = \frac{e^{i2\pi f_m t} + e^{-i2\pi f_m t}}{2} \leftrightarrow \frac{1}{2}[\delta(f - f_m) + \delta(f + f_m)]$$

↗

$$X_m(f) = \frac{1}{2}[X(f - f_m) + X(f + f_m)]$$



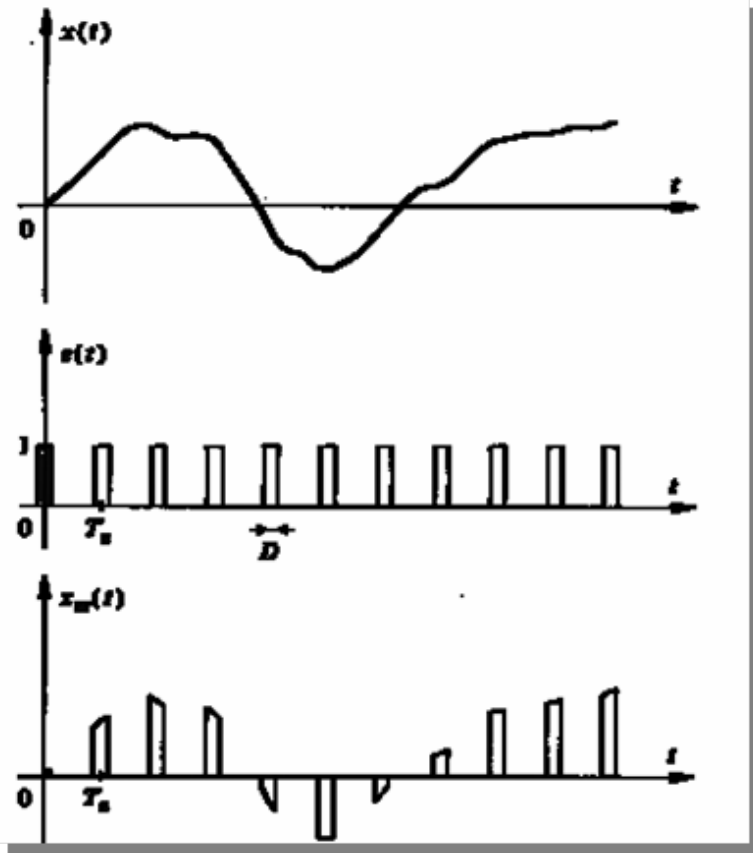
☒ le spectre du signal original est *transposé* dans un intervalle de fréquences centré sur f_m

Echantillonnage réel

Pour convertir un signal analogique $s(t)$ en numérique $s(n)$, on doit nécessairement

moduler $s(t)$ par une fonction d'échantillonnage:
$$e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{rect}\left(\frac{t - nT_e}{D}\right)$$

[Fig.9.4 (I)]




✉ [Signal Sampling and Reconstruction](#)


✉ Le signal numérique $x(k)$ représente un paramètre (amplitude, surface) du signal échantillonné.

✉ Réciproquement, la conversion signal numérique \rightarrow analogique passe par la génération d'un signal échantillonné qui est ensuite traité de manière adéquate pour reconstituer au mieux le signal original

On peut écrire :

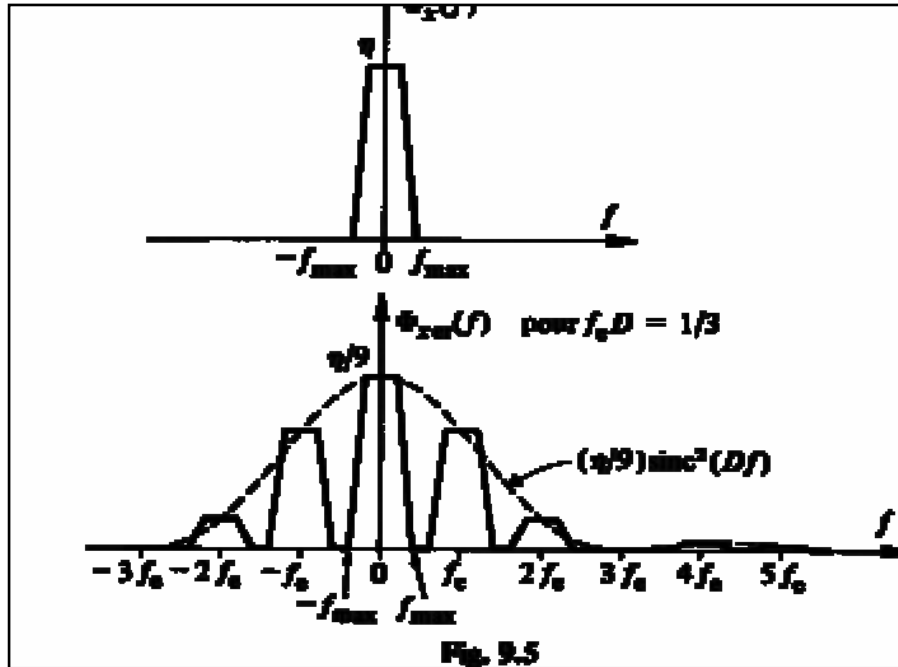
$$e(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{D}\right) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e)$$

$$E(f) = D \frac{\sin(\pi Df)}{\pi Df} \cdot \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nf_e), \quad f_e = \frac{1}{T_e}$$

$$\text{d'où } s_e(t) = s(t) \cdot e(t) \leftrightarrow S_e(f) = S(f) * E(f) = S(f) * Df_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi Dnf_e)}{\pi Dnf_e} \delta(f - nf_e)$$


$$\boxed{S_e(f) = Df_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi Dnf_e)}{\pi Dnf_e} S(f - nf_e)}$$

et (cf exercice)

$$\phi_e(f) = D^2 f_e^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi D n f_e)}{(\pi D n f_e)^2} \phi_s(f - n f_e)$$



⊠ la reconstitution du signal analogique par un filtrage passe-bas est possible à condition que $f_e > 2f_{max}$ (théo. Shannon) et $D \ll T_e$

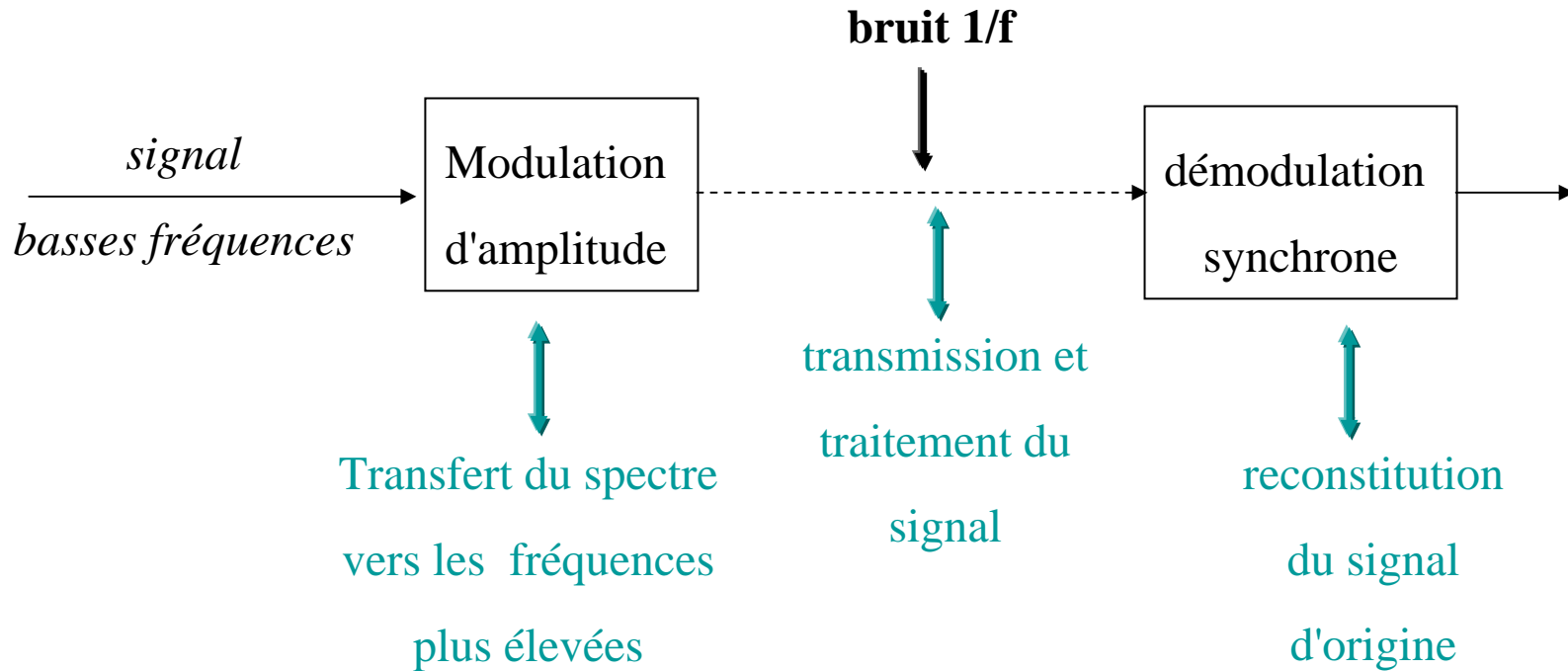
⊠ Réciproquement, pour un signal à large spectre (ex: bruit), un *filtrage passe-bas* est nécessaire pour respecter le critère de Shannon ($f_e > 2f_{max}$) et éviter toute déformation par repliement. On parle de filtrage *anti-repliement*.

B) Détection synchrone

- ✉ De nombreux phénomènes physiques produisent, dans le domaine des *faibles fréquences* ($f < \text{q.q. Hz}$), des signaux aléatoires dont la densité spectrale de puissance augmente vers les basses fréquences. (Ex: fluctuations du courant dans les composants microélectroniques, variations saisonnières de la température locale, données économiques...).
- ✉ On constate expérimentalement que $\phi(f) \propto |f^{-1}|^\alpha$ avec α proche de l'unité, d'où le nom usuel de *bruit 1/f*
- ✉ L'origine de cette loi et les raisons de son apparente universalité ne sont pas encore complètement élucidées.
- ✉ La présence d'un bruit 1/f gêne les mesures des signaux basses fréquences. Pour contourner cette difficulté les physiciens ont recours à la *détection synchrone* qui transfère momentanément le spectre du signal utile dans un domaine de fréquences plus favorable et évite ainsi la dégradation par le bruit 1/f.

Principe

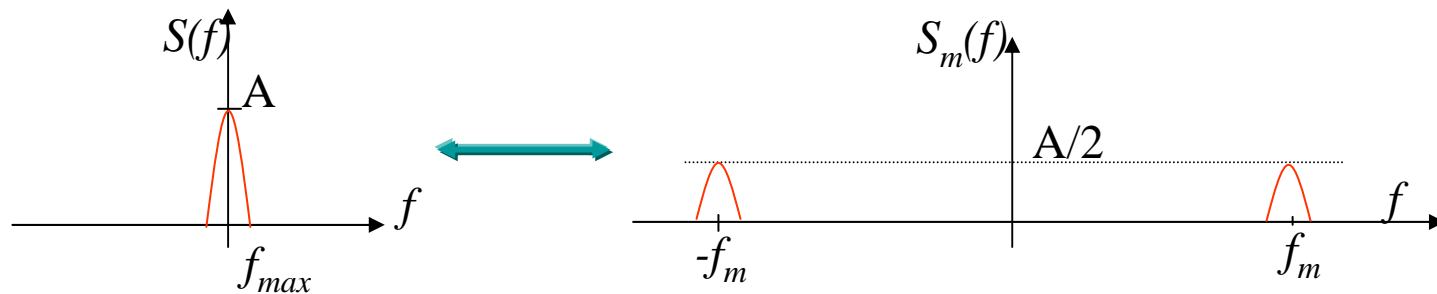
(composants électroniques,
support physique pour la
transmission,...)



a) Modulation et démodulation par un signal sinusoïdal

Modulation: $u(t) = \cos(2\pi f_m t)$ $s(t)$ = signal basses fréquences ($f_{max} \ll f_m$)

$$s_m(t) = s(t) \cdot u(t)$$



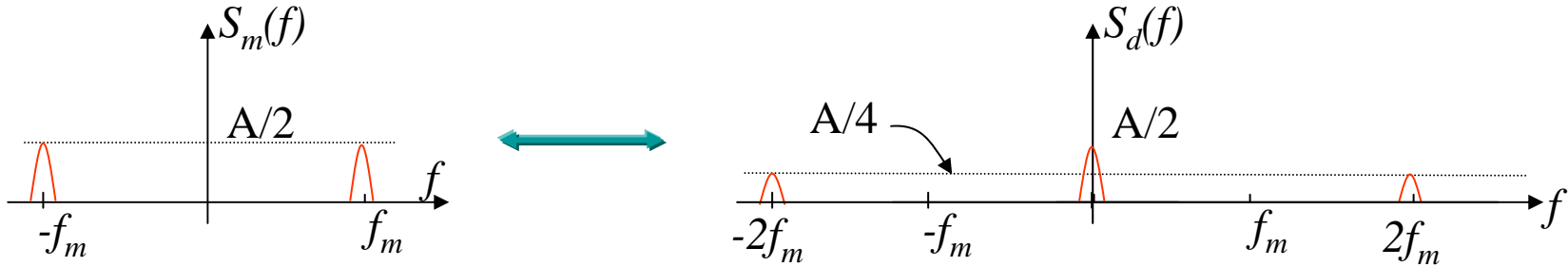
Démodulation synchrone : \Leftrightarrow modulation de $s_m(t)$ par $u_d(t) = \cos(2\pi f_m t + \alpha)$

$$s_d(t) = s_m(t) \cdot u_d(t)$$

$$\Leftrightarrow S_d(f) = \frac{1}{2} S(f) \cos(\alpha) + \frac{e^{i\alpha}}{4} S(f + 2f_m) + \frac{e^{-i\alpha}}{4} S(f - 2f_m)$$

déphasage souvent *inévitabile*
entre les signaux de
modulation et démodulation

Illustration dans le cas $\alpha = 0$:

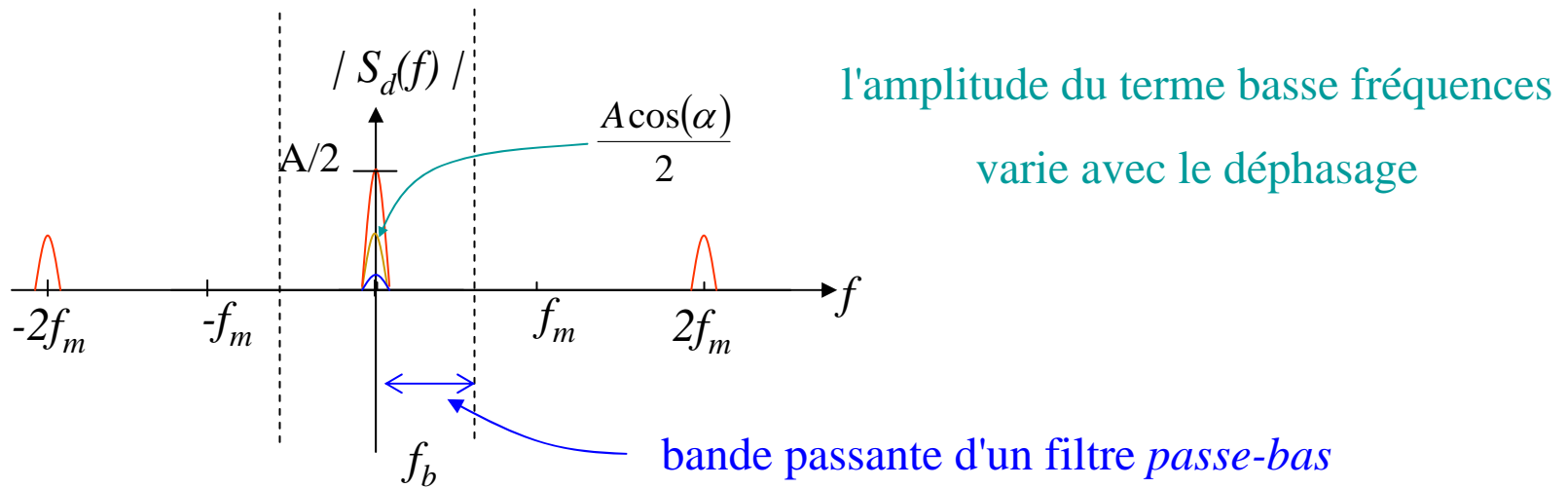


Cas général:

$$S_d(f) = \underbrace{\frac{1}{2}S(f)\cos(\alpha)}_{\in [-f_{\max}, f_{\max}]} + \underbrace{\frac{e^{i\alpha}}{4}S(f+2f_m)}_{\in [-2f_m - f_{\max}, -2f_m + f_{\max}]} + \underbrace{\frac{e^{-i\alpha}}{4}S(f-2f_m)}_{\in [2f_m - f_{\max}, 2f_m + f_{\max}]}$$

Si $f_{\max} \ll f_m$, les trois intervalles *ne se recoupent pas*

$$\Rightarrow |S_d(f)| = \frac{1}{2}|S(f)\cos(\alpha)| + \frac{1}{4}|S(f+2f_m)| + \frac{1}{4}|S(f-2f_m)|$$



☒ on peut restituer le signal original en *filtrant* le signal démodulé par un filtre passe-bas, de bande passante $[0, f_b]$ avec $f_{max} < f_b < 2f_m$ et en *ajustant* le déphasage α de façon à *maximiser* le signal de sortie du filtre ($\cos \alpha = 1$)

☒ La démodulation synchrone suivie d'un filtrage passe-bas *sélectionne* les composantes spectrales centrées, avant démodulation, sur les fréquences $\pm f_m$, et les transpose autour de la fréquence nulle.

b) Démodulation par un signal périodique de fréquence f_m :

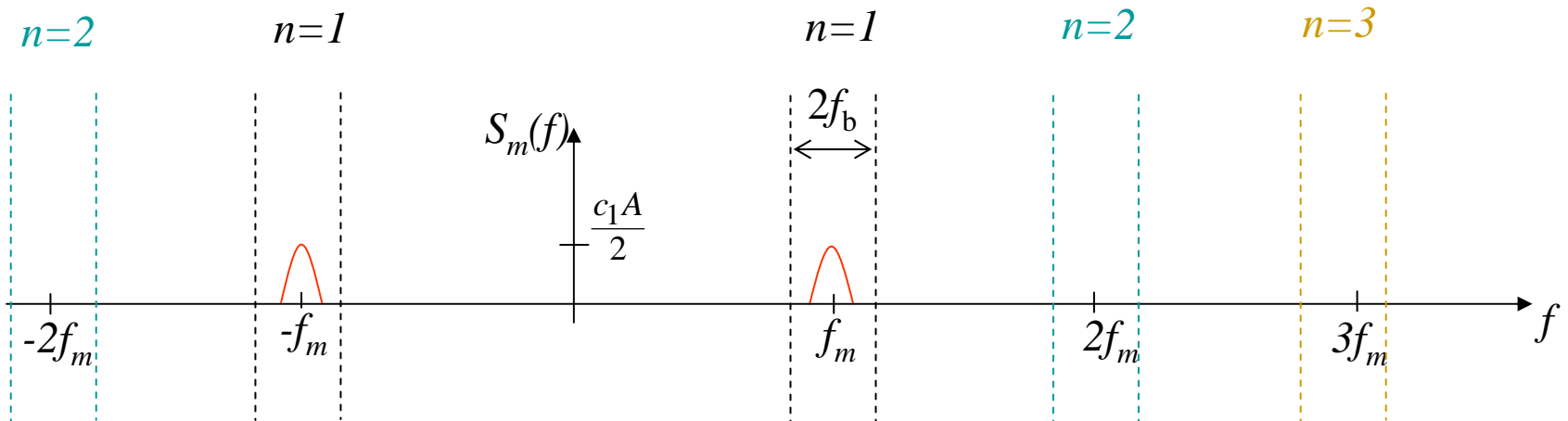
$$\Rightarrow u_d(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(2\pi n f_m t + \alpha_n) \quad (\text{Série de Fourier, } \overline{u_d(t)} = 0)$$

$$\Rightarrow s_d(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \underbrace{s_m(t) \cos(2\pi n f_m t + \alpha_n)}$$

démodulation *sinusoïdale* à la
fréquence $n f_m$ déphasée de α_n



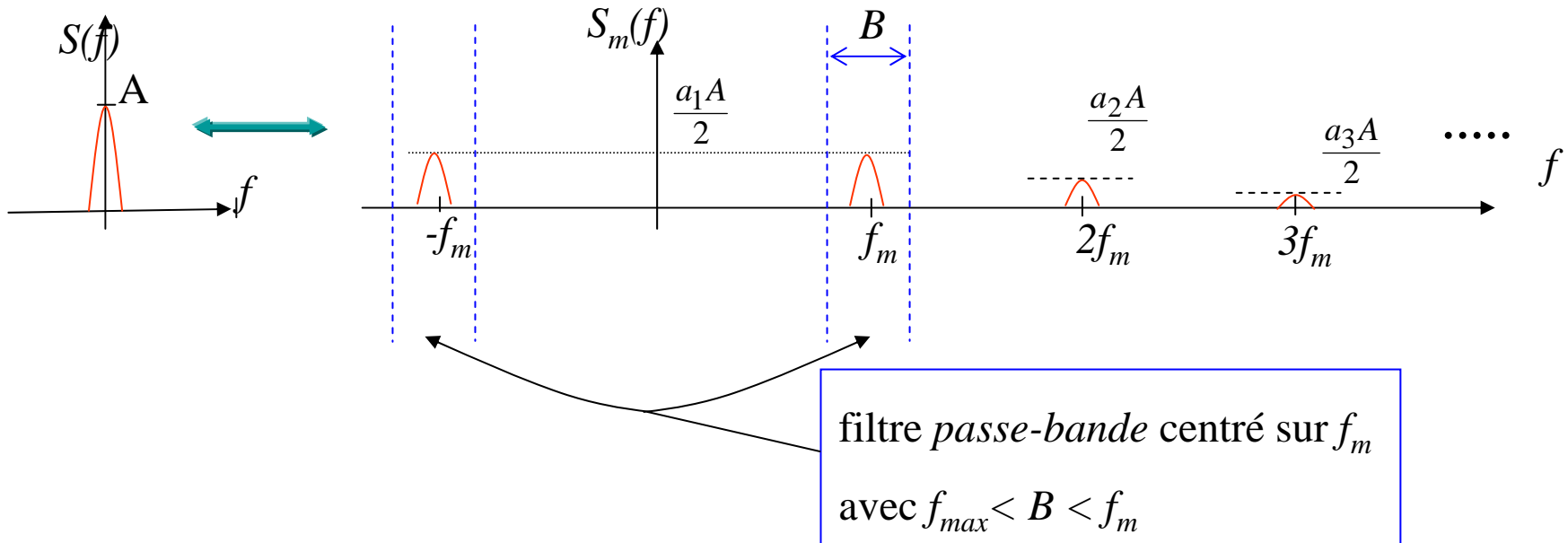
sélectionne les termes de $S_m(f)$
centrées sur $n f_m$



⊗ Dans l'hypothèse du signal basses fréquences, les termes supplémentaires (par rapport à la démodulation sinusoïdale) sont nuls!

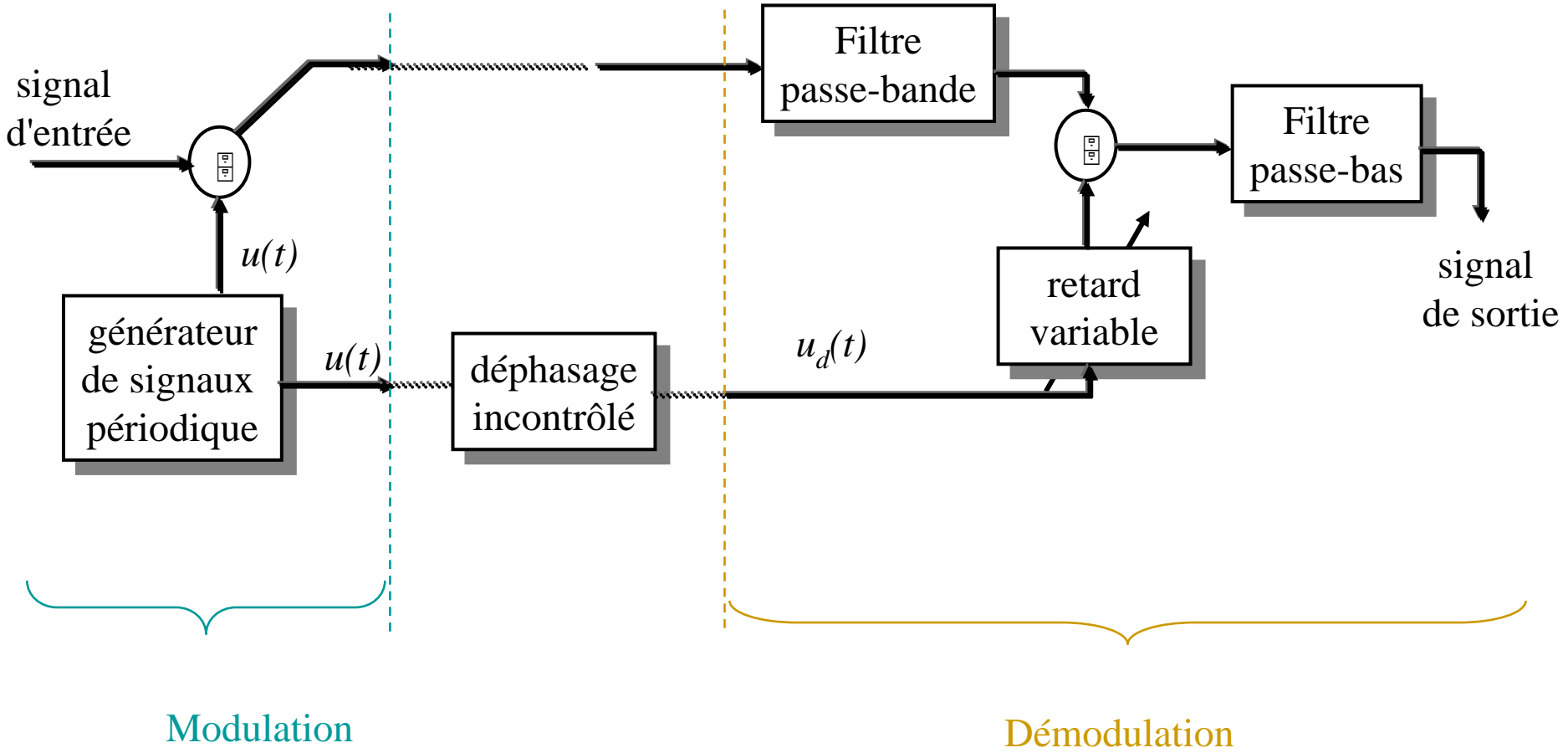
c) Modulation et démodulation par un signal périodique de fréquence f_m :

Modulation par
$$u(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2\pi n f_m t + \beta_n)$$

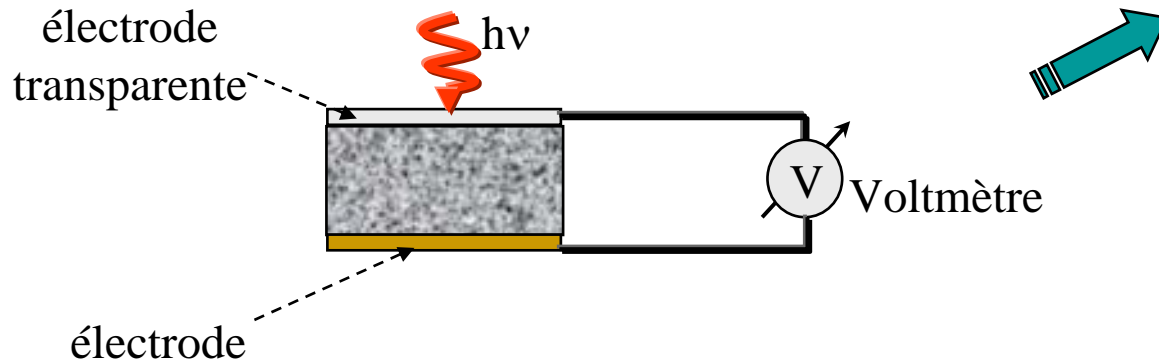


- ☒ en ajoutant un filtre *passe-bande supplémentaire* on retrouve la situation du §b
- ☒ La forme exacte, sinusoïdale ou rectangulaire ou autre, du signal de modulation ne change que l'amplitude du signal démodulé (via le coefficient de Fourier). Ce résultat simplifie considérablement la réalisation pratique de la détection synchrone

Schéma-bloc de la détection synchrone



Exemple : Mesure d'une phototension



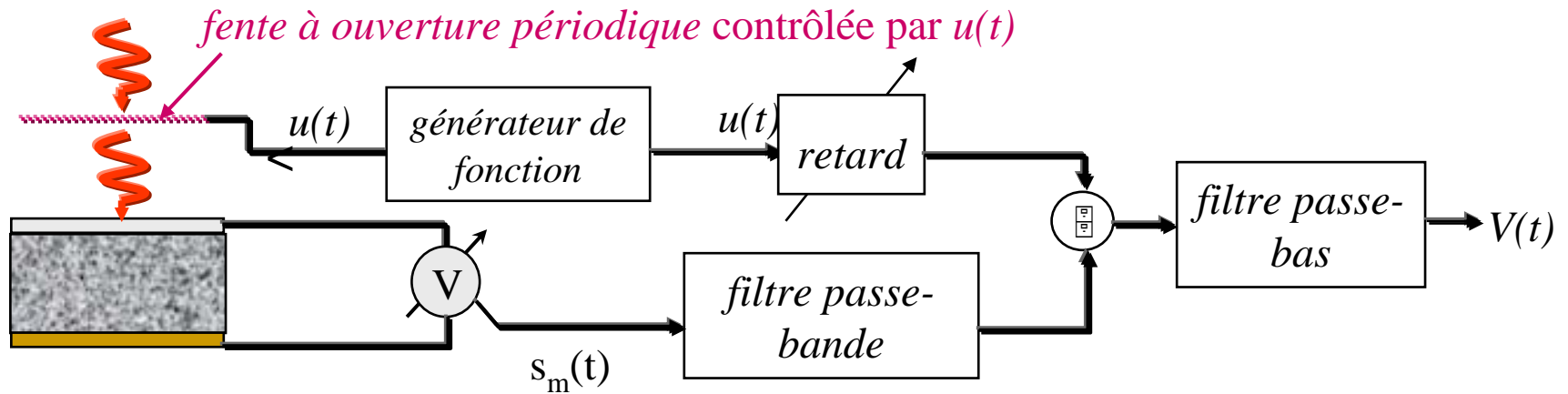
$V(\nu) \leftrightarrow$ informations sur
la durée de vie des
porteurs électriques
photogénérés

✉ Pour des raisons techniques la variation de ν est *lente* (déplacement des composantes optiques du système - prisme, réseau, filtres optiques...)

↓ $V(t)$ = signal à *basses fréquences*

✉ Les signaux parasites, ou bruit, proviennent des fluctuations de la tension en absence de lumière.

Mise en œuvre de la détection synchrone:



✉ la modulation est effectuée par la fente avant la génération de la phototension



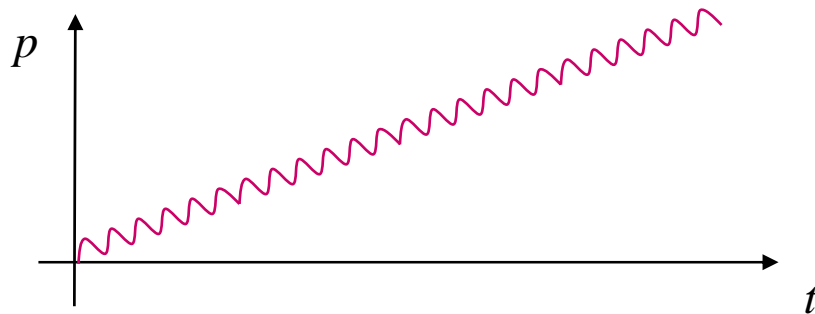
✉ [Virtual Lock-in project](#)

C) Détection synchrone en mode "lock-in"

- ☒ Une opération fréquente en Physique consiste à mesurer une grandeur physique U (ex.: courant électrique, taux d'absorption d'une onde,...) en fonction d'un paramètre physique p qui caractérise le système (ex: température, pression, champ magnétique,).
- ☒ Pour des raisons techniques, la vitesse de variation du paramètre p est souvent limitée. Il en résulte des signaux $U[p(t)]$ de relativement faible fréquence.

Mode Lock-in

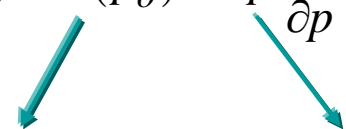
Pour mesurer la loi caractéristique $U(p)$ on fait varier lentement le paramètre p sur un intervalle donné. A cette variation lente est *ajoutée* une variation de p à fréquence élevée de *faible* amplitude Δp



$$U(p) = U(p_o + \Delta p), \text{ avec } p_o = v \cdot t$$

↓
périodique de fréquence f_m

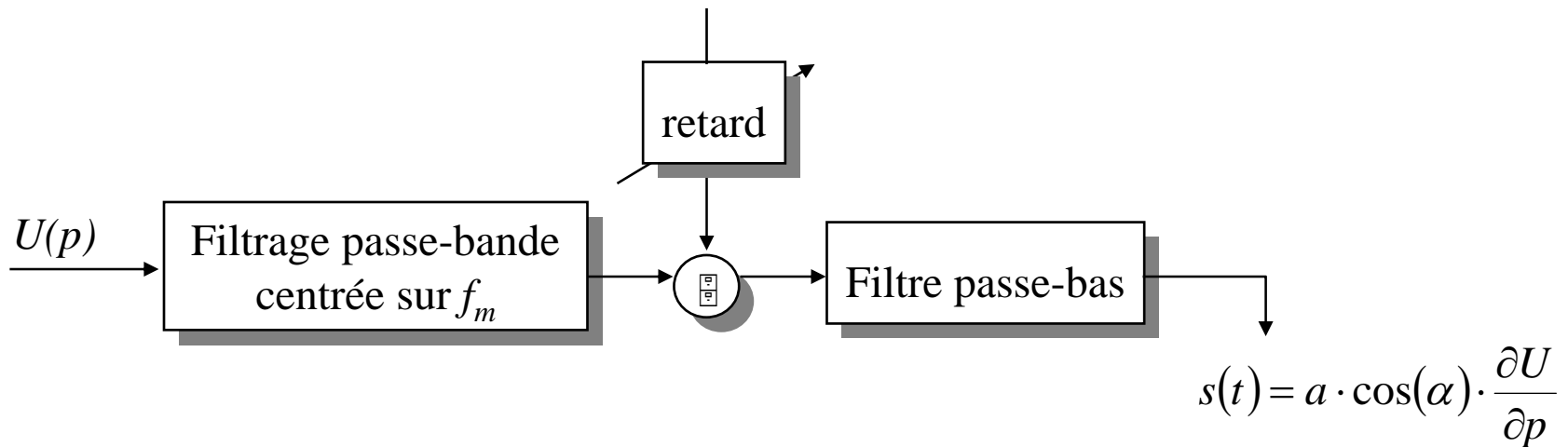
En première approximation: $U(p) \approx U(p_o) + \Delta p \left. \frac{\partial U}{\partial p} \right|_{p_o}$




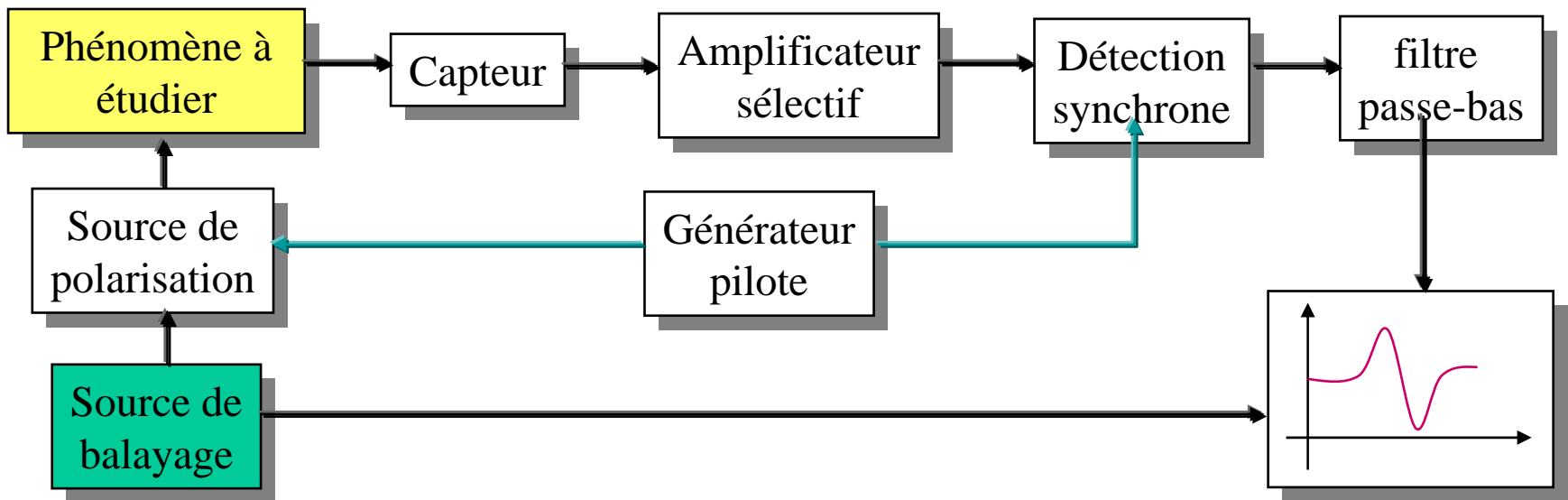
basses fréquences hautes fréquences

Détection synchrone:

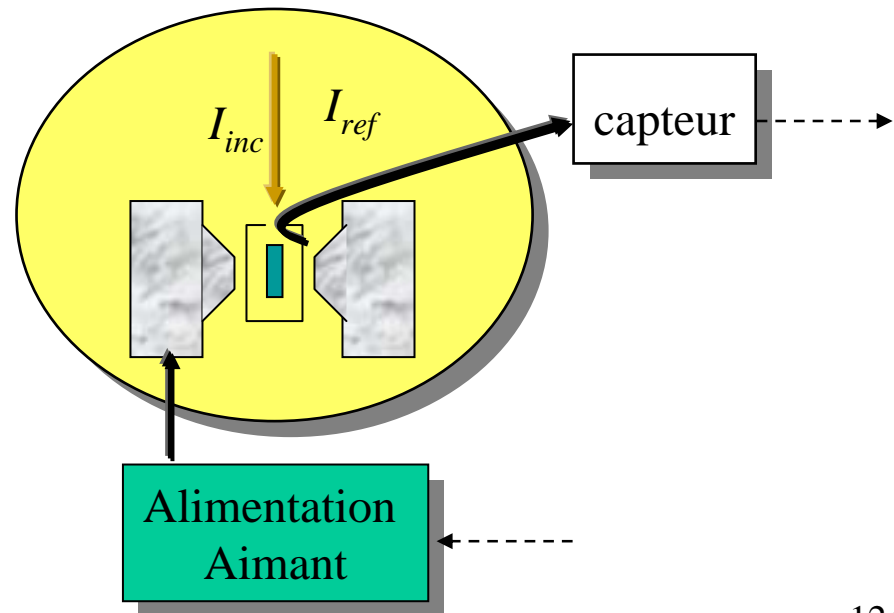
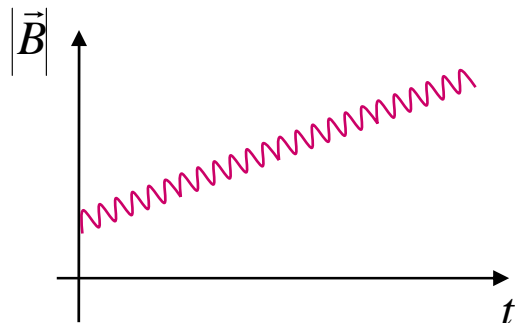
$u_d(t) = \text{signal périodique de même période que } \Delta p$



 on mesure ainsi $\frac{\partial U}{\partial p}(p_o)$



Exemple:

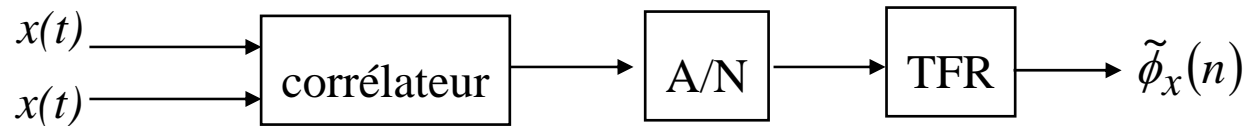


II.4 Analyse spectrale

Ce chapitre décrit différentes approches expérimentales permettant d'estimer les densités spectrales des signaux physiques.

A) Corrélogramme et périodogramme

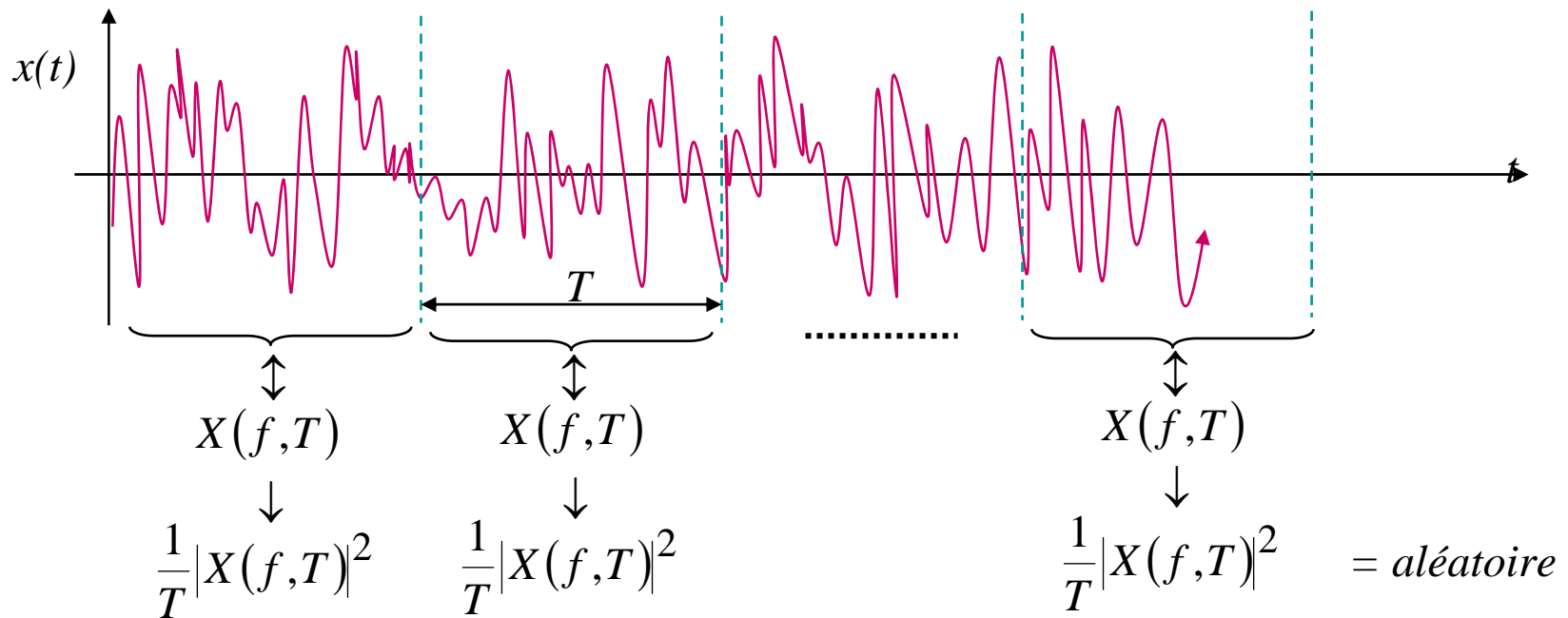
La méthode du *corrélogramme* est basée sur le [théorème de Wiener-Khinchine](#):



Limitations:

- ↑ durée d'intégration du corrélateur
- ↑ fréquence d'échantillonnage

↓ Un périodogramme correspond à une réalisation approximative de la définition de $\phi_x(f)$
pour les signaux aléatoires



$$\Rightarrow \tilde{\phi}_x(f) = \left\langle \frac{|X(f, T)|^2}{T} \right\rangle_{\text{moyenne sur } N \text{ mesures}}$$

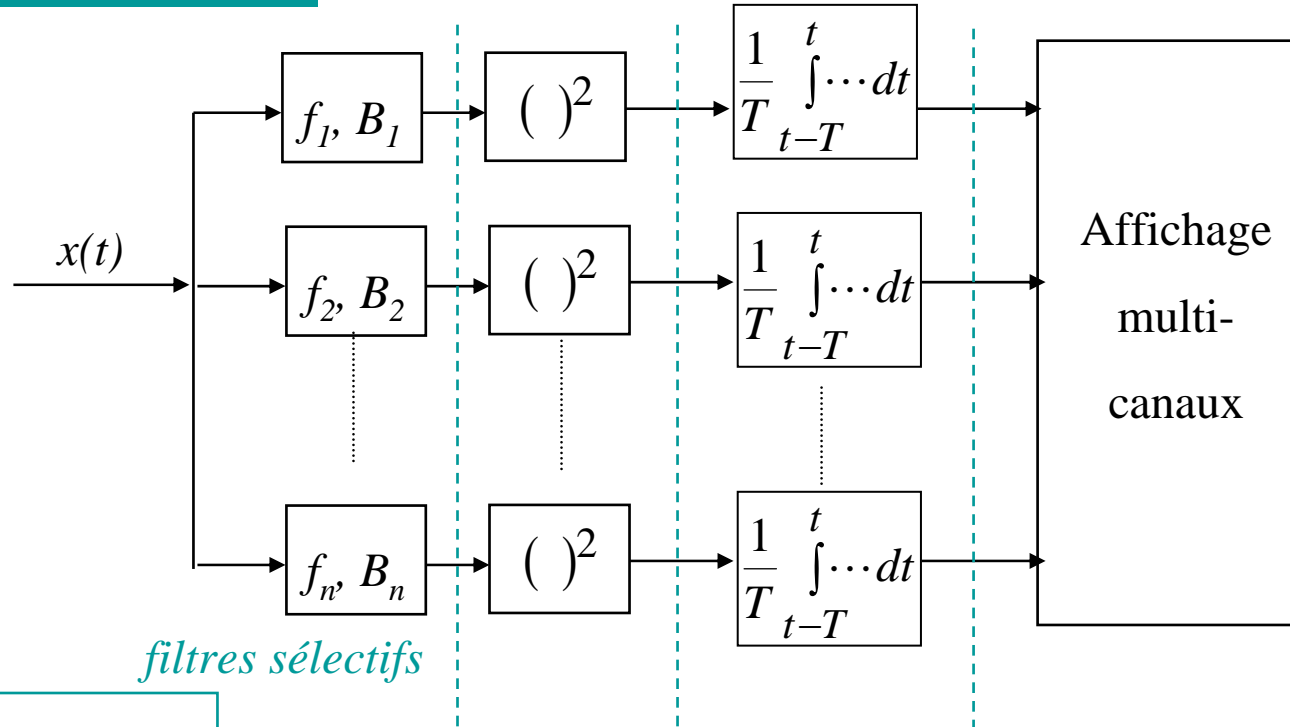
Limitations:

↓ largeur et forme de la fenêtre temporelle T

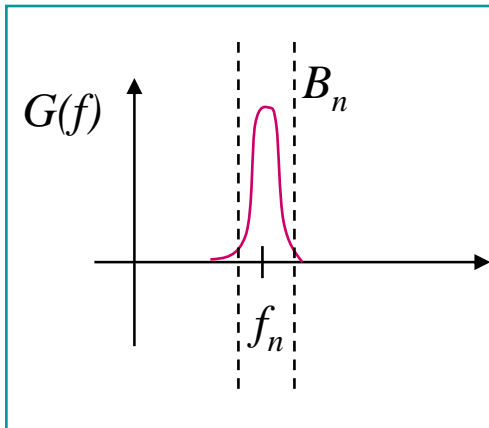
↓ durée de la mesure → nombre finie d'estimation de $X(f, T)$

B) Analyseur à banc de filtres

Principe



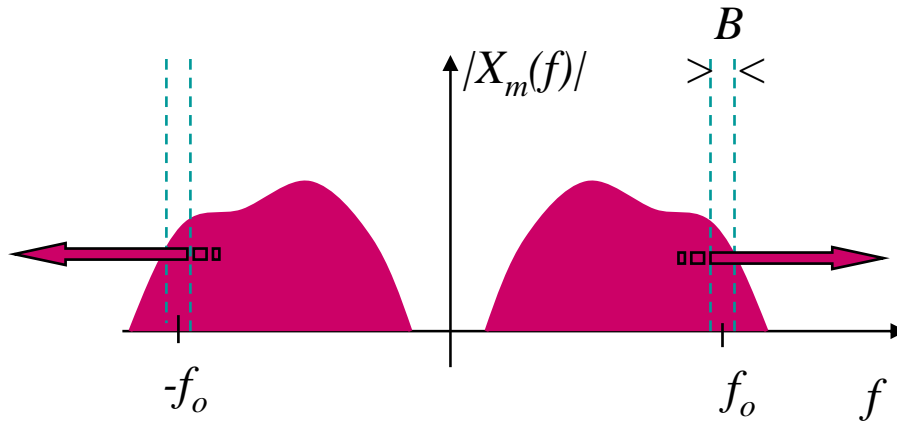
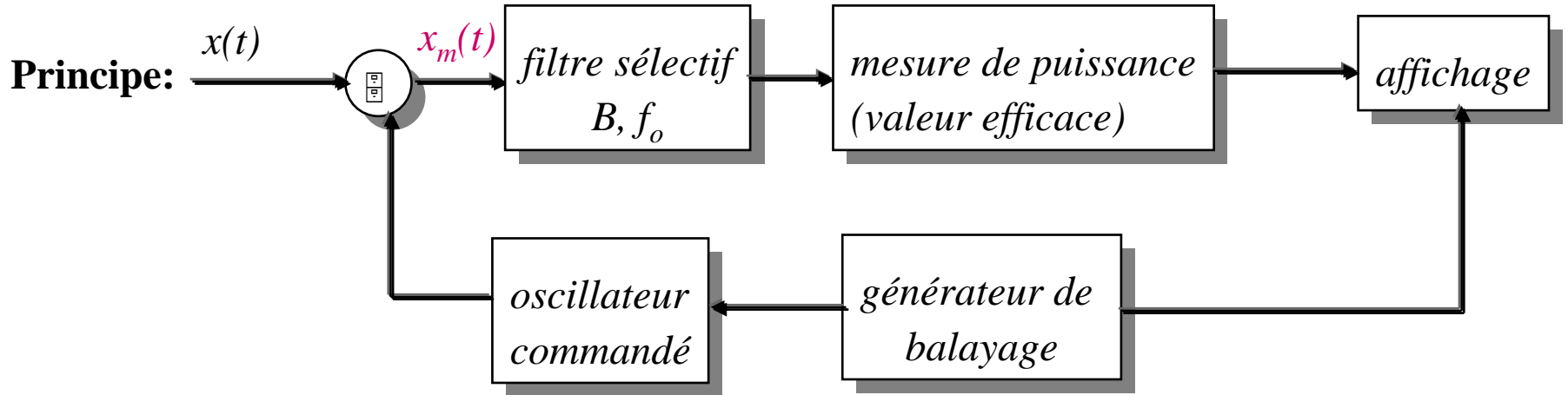
filtres sélectifs



- ☒ Permet l'observation *simultanée* de tout le spectre
- ☒ Résolution spectrale ∇ avec le nombre de composants
- ☒ Equipement lourd

C) Analyseur de spectre à balayage

Ce type d'analyseur fait appel au concept de transfert du spectre par modulation d'amplitude



⊠ résolution spectrale = B

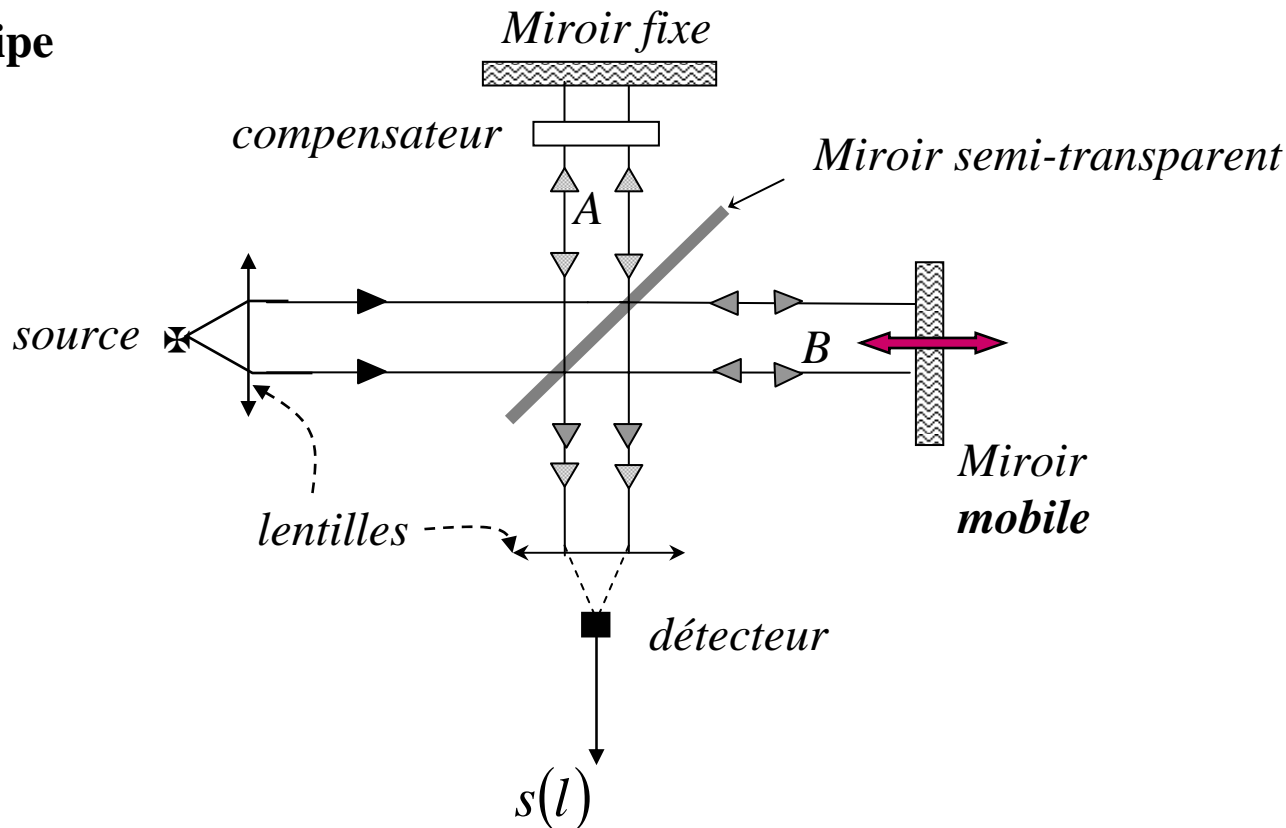
⊠ à chaque intervalle de fréquence ne correspond qu'une faible fraction du temps de mesure → limite le rapport signal/bruit

D) Spectromètre interférométrique ou Spectromètre Fourier

Ce type d'analyseur de spectre exploite la relation qui relie l'interférogramme produit par un interféromètre Michelson à la densité spectral du signal.

☒ S'applique au cas où le signal est sous forme d'une onde électromagnétique.

Principe



avec l = différence entre les chemins optiques A et B

Pour une lumière monochromatique de nombre d'onde k :

$$\cdots \rightarrow s(l) = \frac{I_o}{2} [1 + \cos(2\pi kl)], \text{ } I_o \text{ est proportionnel à l'intensité de la lumière incidente}$$

En cas de lumière "colorée" caractérisée par une distribution continue en nombre d'onde $I(k)$

$$\rightarrow s(l) = \frac{1}{2} \left(I_o + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} I(k) \cdot e^{i2\pi kx} dk}_{"x(l)"} \right) = \textit{interférogramme} \quad \longrightarrow \quad \boxed{x(l) \leftrightarrow I(k)}$$

✉ On peut estimer la distribution spectrale de la lumière incidente en effectuant la transformée de Fourier de l'interférogramme.

✉ Le déplacement du miroir étant nécessairement fini, on n'a accès qu'à une version tronquée de l'interférogramme. Les conséquences sur le spectre final sont identiques à celles causé par l'observation d'un signal $s(t)$ à travers une fenêtre *temporelle*.

✉ La distance maximale parcourue par le miroir détermine la résolution spectrale.

- ✉ L'interférogramme est généralement échantillonné pour permettre le calcul de la Transformée de Fourier par voie numérique.
- ✉ La fréquence d'échantillonnage doit tenir compte de la largeur du spectre analysé (déterminée en général par la réponse fréquentielle du détecteur et/ou des composantes optiques de l'interféromètre) pour éviter toute déformation du spectre par recouvrement (théorème de Shannon).
- ✉ Chaque composante spectrale est analysée sur la *totalité* du temps de mesure. Cette particularité permet, dans le proche et lointain infrarouge, d'augmenter de plusieurs ordres de grandeur la sensibilité (rapport signal/bruit) du spectromètre par rapport aux spectromètres à réseau ou à prismes, où le détecteur n'analyse simultanément qu'une petite partie du spectre.

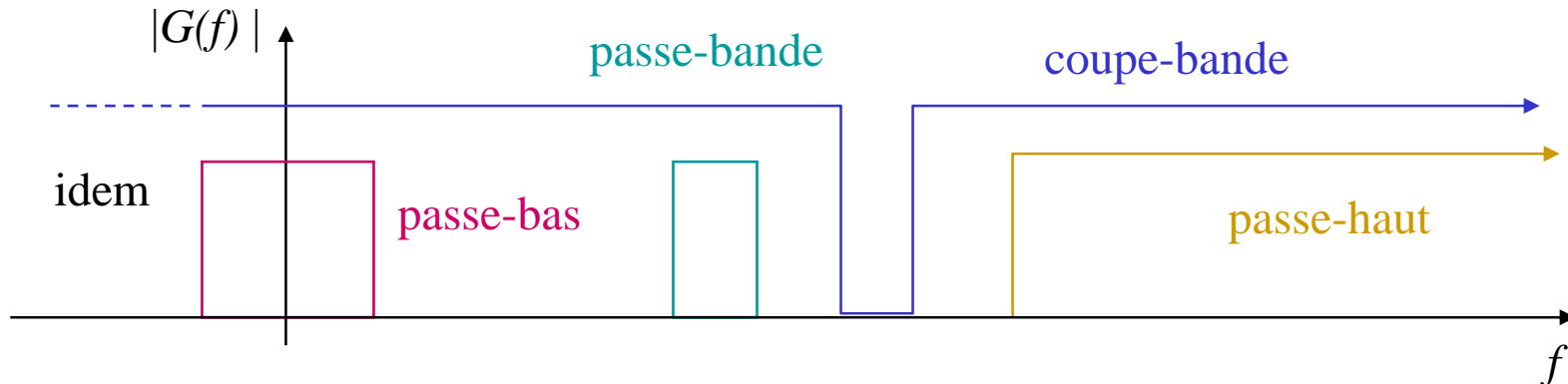
II.5 Filtrage des signaux

A) Introduction

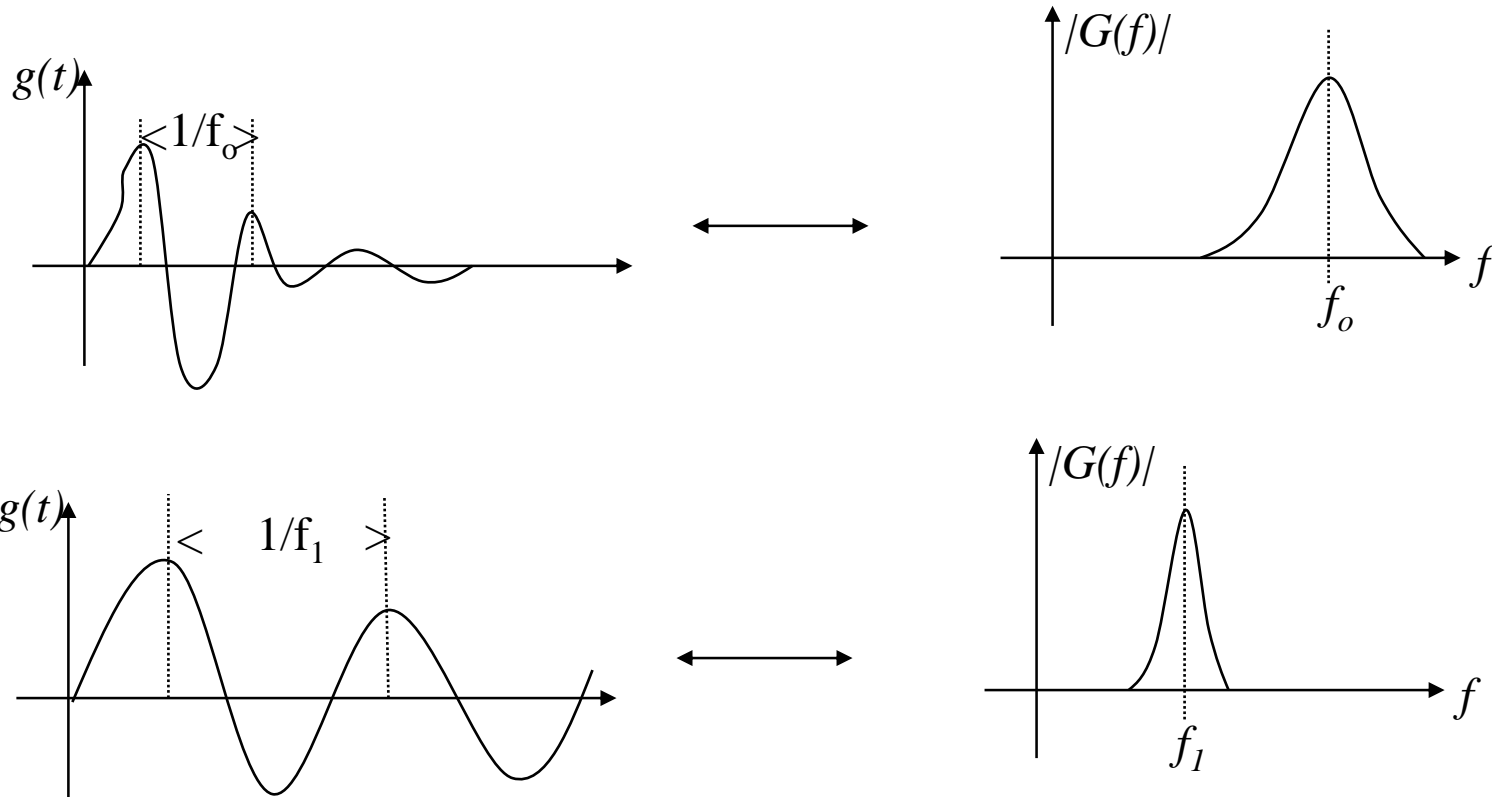
Le filtrage des signaux est une opération essentielle en traitement du signal (filtrage anti-repliement, détection synchrone,...). Cette opération peut être réalisée soit par des systèmes analogiques (filtre RC, composants optiques, acoustiques...), soit par un *algorithme* informatique à condition que les signaux soient sous forme numérique. La méthode numérique est d'autant plus intéressante que la puissance et la rapidité de calcul des microprocesseurs sont élevées. Elle est particulièrement utile en Physique où les données expérimentales sont souvent sous forme de suites numériques.

B) Filtres analogiques

Réponses fréquentielles idéalisées de filtres analogiques :



✉ Une largeur de bande étroite engendre nécessairement une durée élevée de la réponse impulsionnelle $g(t) \leftrightarrow G(f) \Rightarrow \Delta g \cdot \Delta G \geq 1$

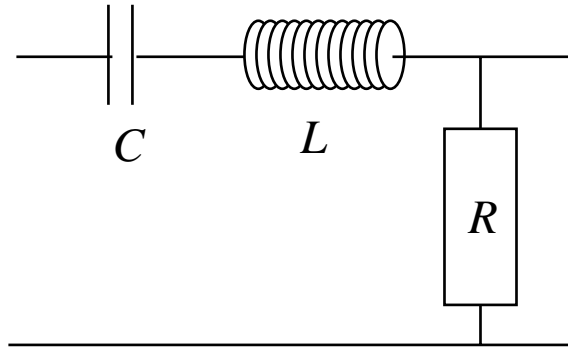


Filtre analogique du 1^{ier} ordre: \Leftrightarrow équation différentielle du système = 1^{ier} ordre

ex: circuits RC , RL ,

Filtre analogique du 2^d ordre: \Leftrightarrow équation différentielle du système = 2d ordre

Exemples: circuit RLC



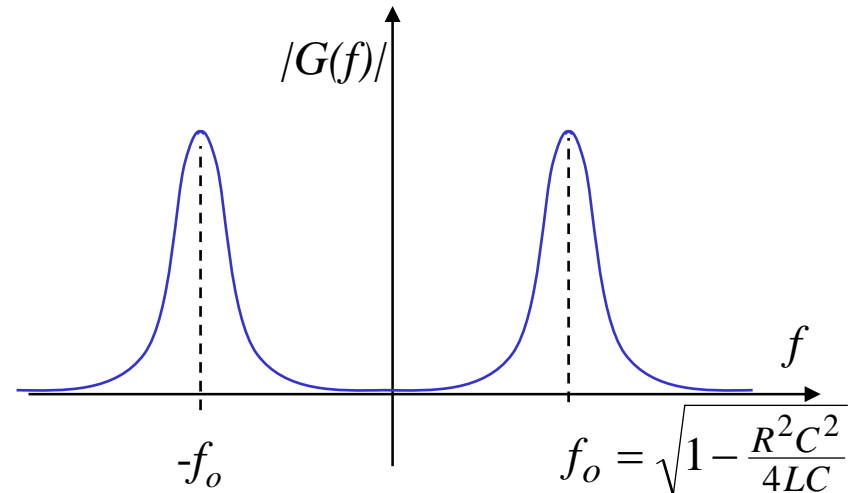
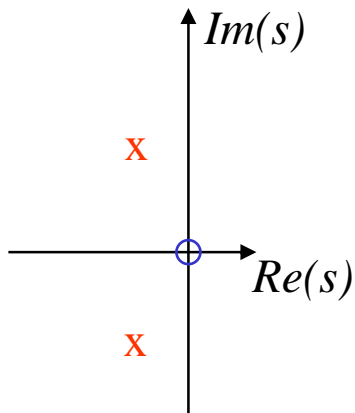
$$\Rightarrow G(s) = \frac{RCs}{LCs^2 + RCs + 1}$$

Points singuliers:

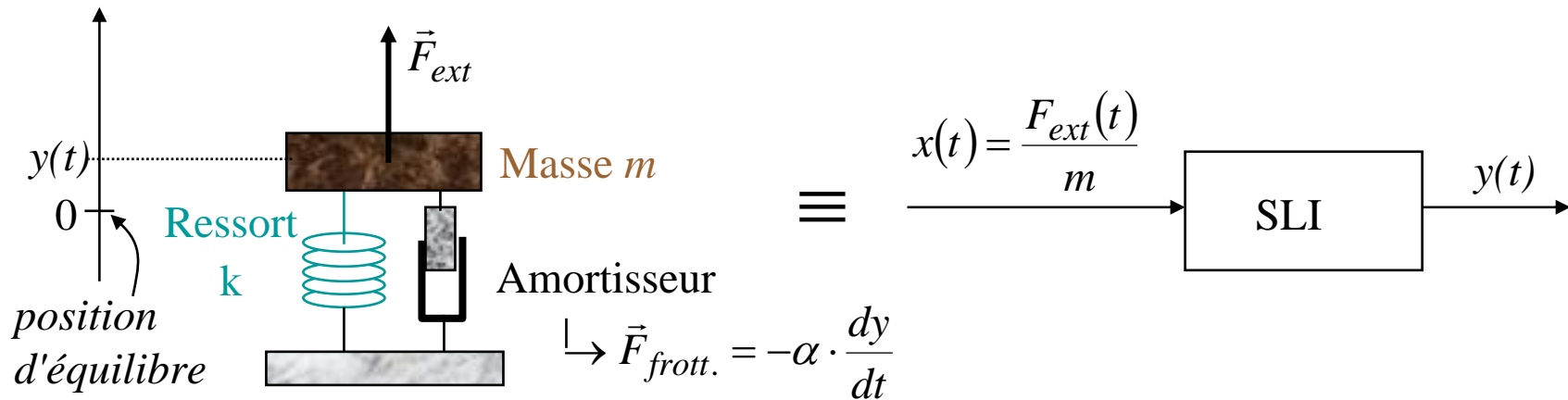
1 zéro: $z=0$

$$2 \text{ pôles: } p_{\pm} = \frac{-RC \pm \sqrt{R^2C^2 - 4LC}}{2LC}$$

cas $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$



systeme mécanique: Amortisseur



Equation différentielle: $\frac{d^2 y}{dt^2} + \gamma \frac{dy}{dt} + \omega_o^2 = x$, avec $\gamma = \frac{\alpha}{m}$ et $\omega_o^2 = \frac{k}{m}$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2 + \gamma s + \omega_o^2}$$

Points singuliers: $p_{\pm} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_o^2}$

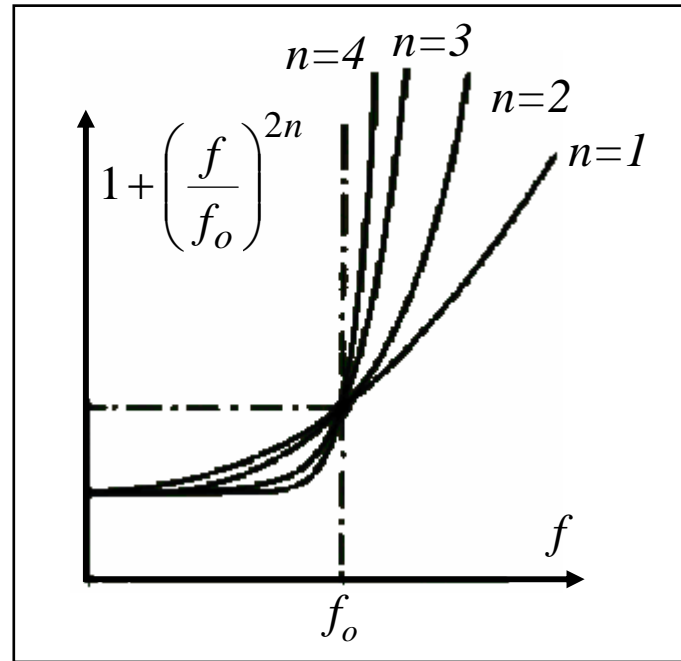
La position des pôles déterminent la réponse impulsionnelle du système

- ☒ Une impulsion donne lieu à des oscillations si les pôles ont une partie imaginaire
- ☒ Les oscillations sont d'autant plus forte que la partie réelle des pôles est faible
- ☒ Il y a amortissement efficace si les pôles sont réels.

Filtres de Butterworth d'ordre n

$$|G(f)|^2 \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{1 + \left(\frac{f}{f_o}\right)^{2n}}$$

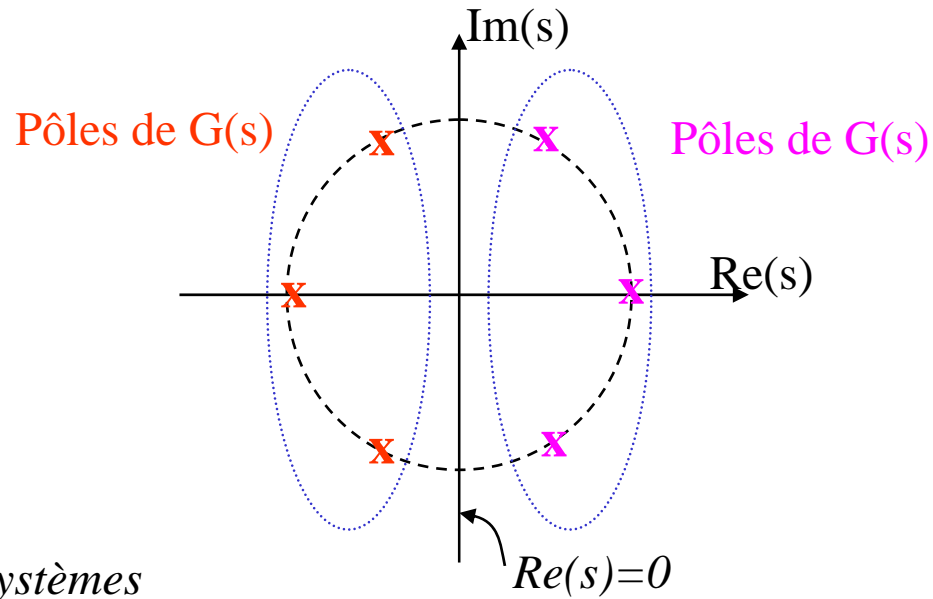
☒ tend vers le filtre passe-bas idéal
lorsque $n \nearrow$



Pôles de $|G(s)|^2$: $\dots \rightarrow p_k = 2\pi f_o e^{i\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{2k+1}{n}+1\right)\right]}$, $k = 1, \dots, 2n$

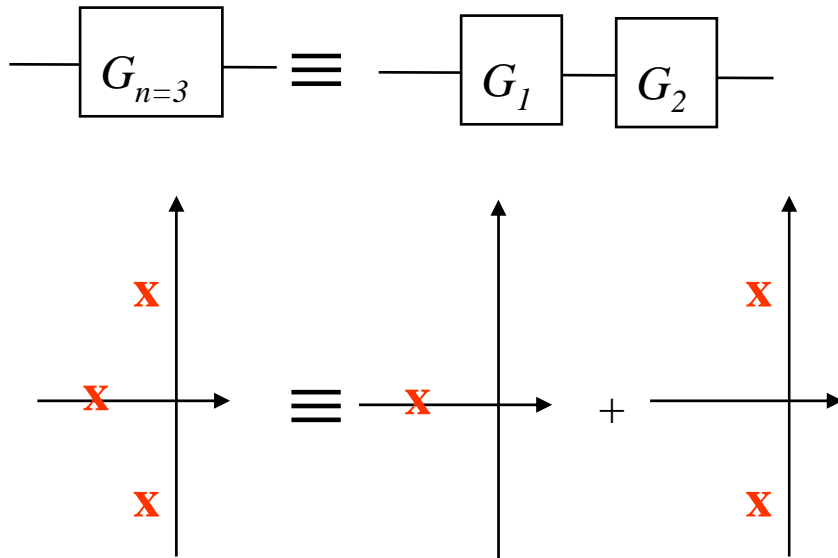
- ☒ Les pôles sont symétriques par rapport aux axes $Im(s)=0$ et $Re(s)=0$
- ☒ Les pôles sont situés sur un cercle de rayon $2\pi f_o$
- ☒ $|G(s)|^2 = G(s) \cdot G^*(s) = G(s) \cdot G(-s)$ [$g(t)$ réelle]
- ☒ Les pôles de $G(s)$ et $G(-s)$ sont symétriques par rapport à l'axe $Re(s)=0$
- ☒ Stabilité du filtre $\Leftrightarrow Re[\text{Pôles de } G(s)] < 0$

Exemple $n=3$:

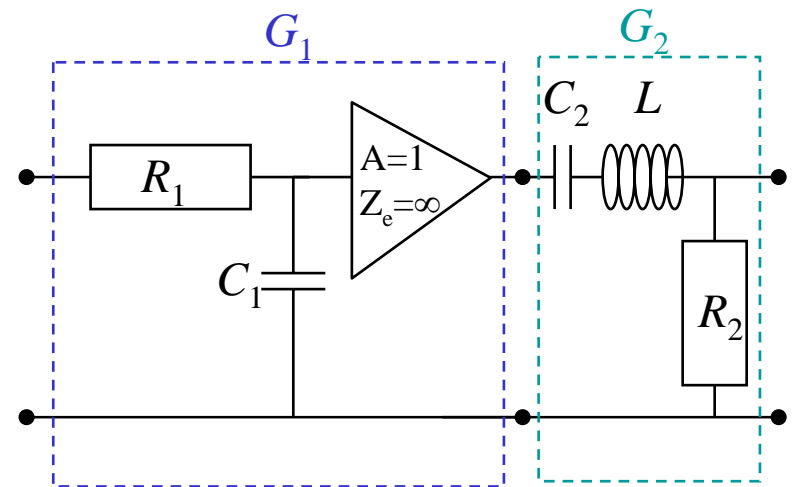


Décomposition en systèmes

élémentaires:



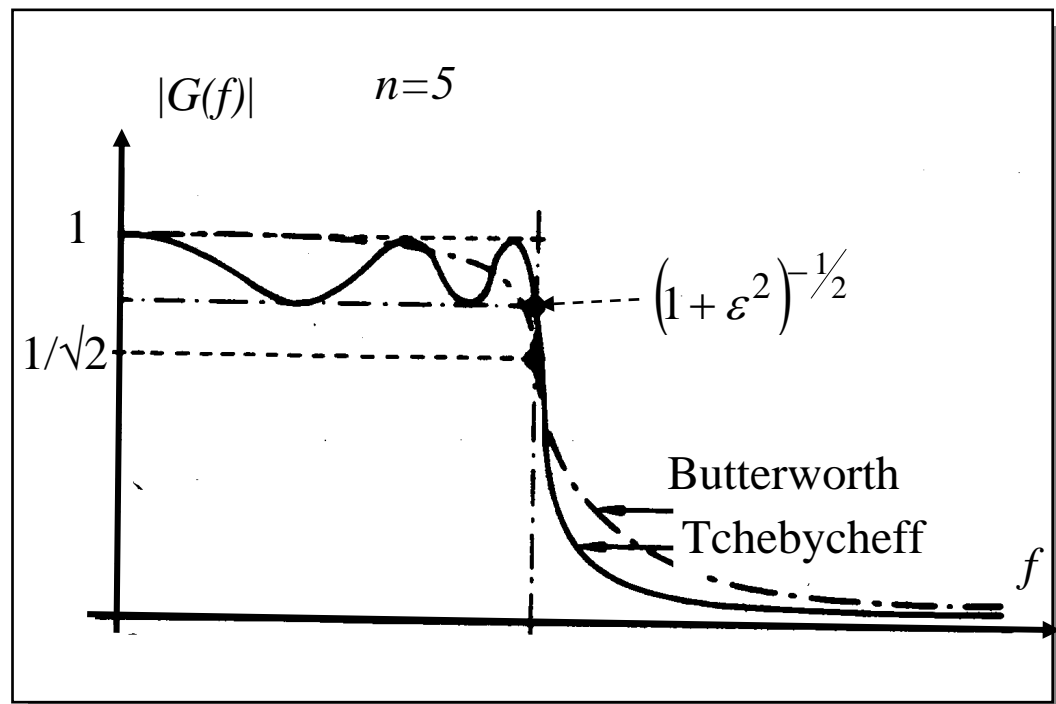
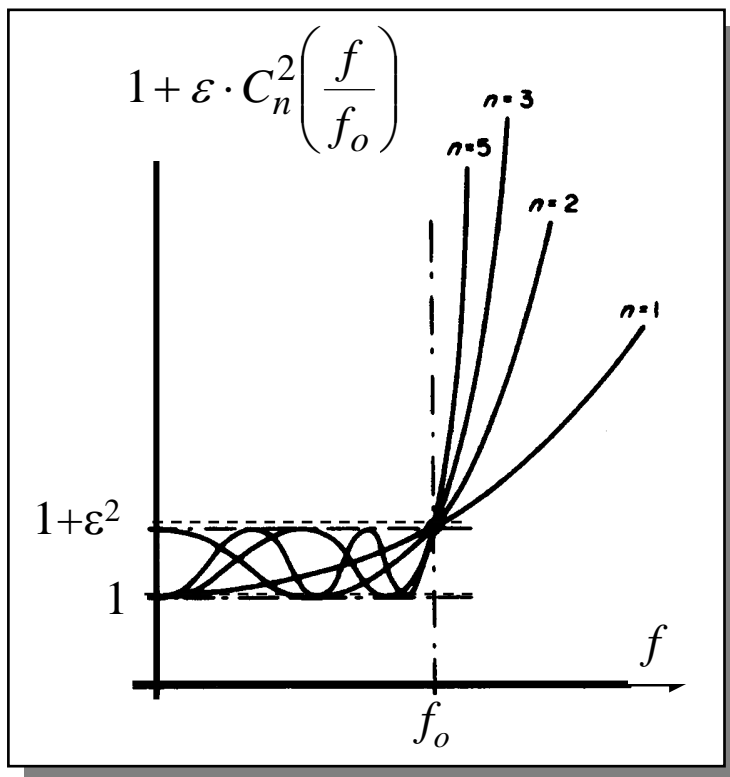
Exemple de réalisation:



Filtres de Tchebycheff d'ordre n

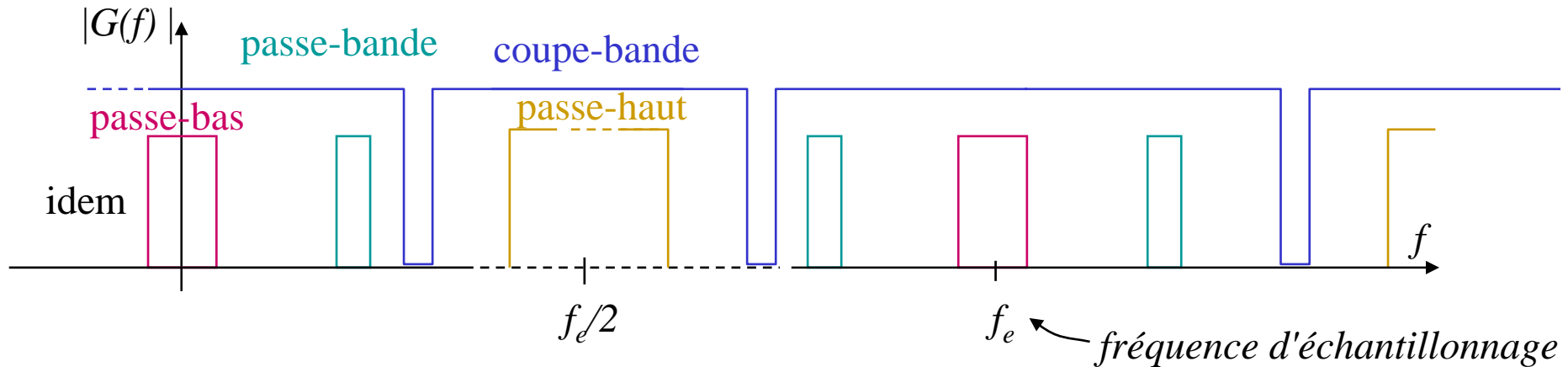
$$|G(f)|^2 \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{1 + \varepsilon \cdot C_n^2\left(\frac{f}{f_o}\right)}$$

avec $C_n = \text{polynôme de Tchebycheff d'ordre } n$



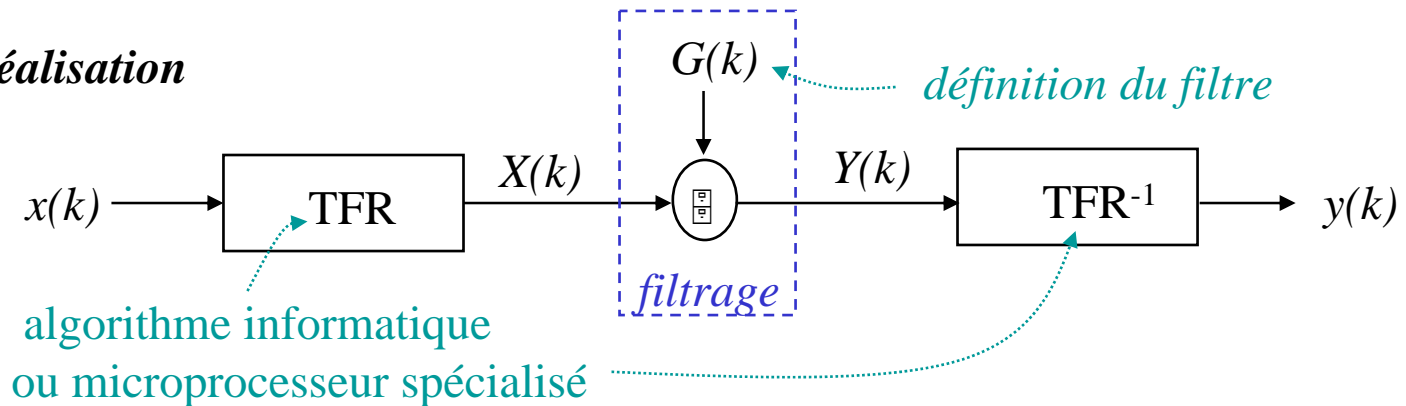
C) Filtres numériques

Réponses fréquentielles idéalisées de filtres numériques :



Méthodes de réalisation

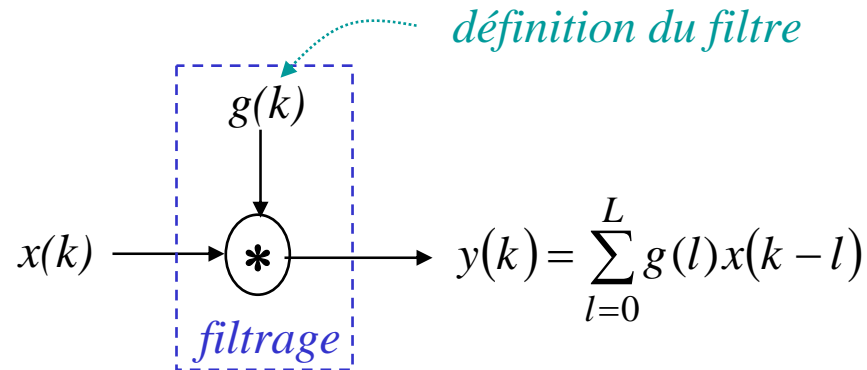
Par TFR:



+ flexibilité

- pas de fonctionnement en *temps réel* (nécessite la connaissance de tout $x(k)$)
- nécessite stockage de nombreuses données

Par convolution:



+ flexibilité

- calcul long si L élevé

- nécessite stockage de nombreuses données

(L = durée de $g(k)$)

Réalisation récursive

L'équation aux différences, qui relie entre eux les valeurs de $x(k)$ et $y(k)$, est l'équivalent numérique de l'équation différentielle linéaire à coefficient constant des systèmes analogiques. Elle a la forme générale:



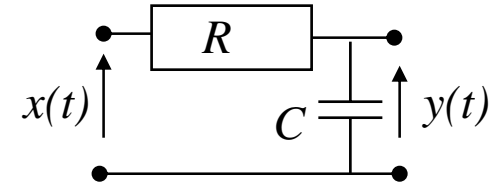
$$\sum_{n=0}^N a_n(k)y(k-n) = \sum_{m=0}^M b_m(k)x(k-m) \quad , \text{ où } N \text{ et } M \text{ sont des nombres entiers positifs}$$

☒ On peut utiliser cette équation pour *réaliser* le filtre.

Exemple: Equivalent numérique d'un filtre RC

Equation différentielle du filtre

analogique: $RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$



Approximation numérique:

$$t \rightarrow kT_e \Rightarrow \frac{dy(t)}{dt} \cong \frac{y(kT_e) - y(kT_e - T_e)}{T_e}, \text{ avec } T_e = \text{période d'échantillonnage} \stackrel{\text{convention}}{=} 1$$

Equation aux différences:

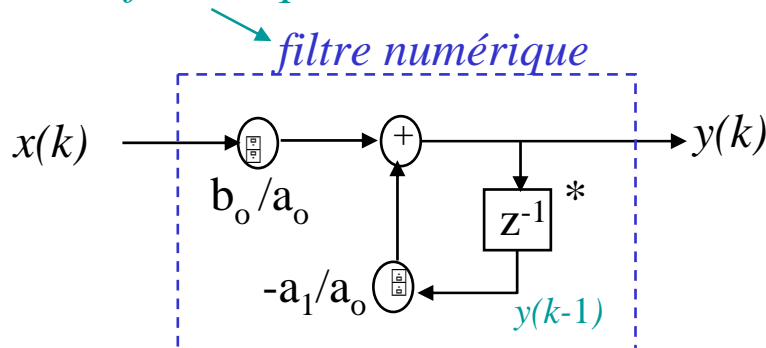
$$(RC + 1)y(k) - RC \cdot y(k-1) = x(k) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} N=1, M=0, \\ a_0=RC+1, a_1=-RC, b_0=1 \end{cases}$$

Réalisation du filtre:

$$y(k) = \frac{RC}{RC+1} y(k-1) + \frac{1}{1+RC} x(k)$$

Equation *réursive*


algorithme informatique



$$* \quad x(k) \longrightarrow \boxed{G(z)=z^{-1}} \longrightarrow x(k-1)$$

Réponse impulsionnelle: réponse au signal $\delta(k) = \begin{cases} 1 \text{ pour } k = 0 \\ 0 \text{ pour } k \neq 0 \end{cases}$

hypothèse: pas de signaux à l'entrée pour $k < 0 \rightarrow y(k < 0) = 0$

 on a: $y(k) = \alpha \cdot y(k-1) + \beta \cdot x(k)$, avec $\alpha = \frac{RC}{RC+1}$ et $\beta = \frac{1}{1+RC}$

$y(0) = \beta$; $y(1) = \beta\alpha$; $y(2) = \beta\alpha^2$; ... ; $y(k) = \beta\alpha^k \Rightarrow y(k) = \beta\alpha^k \varepsilon(k) \stackrel{!}{=} g(k)$

Fonction de transfert:

$$G(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} (\beta\alpha^k) z^{-k} = \beta \frac{z}{z - \alpha}$$

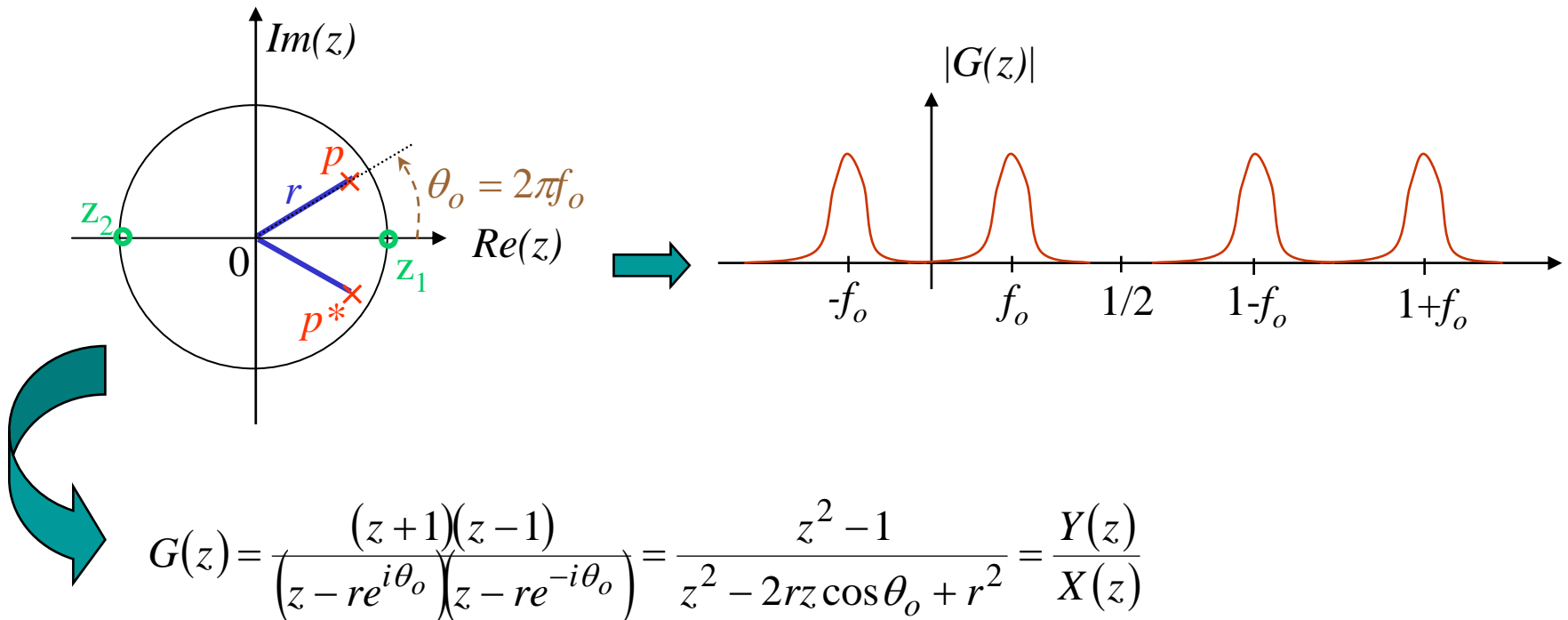
 [Réponse fréquentielle, voir §I.5.D](#)

☒ Il s'agit bien d'un filtre passe - bas!

Conception d'un filtre numérique:

- ☒ La position des *points singuliers de $G(z)$* détermine le type du filtre
- ☒ L'équation aux différences est établie à partir de $G(z)$ et permet la réalisation récursive

Illustration: Filtre passe - bande



$$\Rightarrow \underbrace{z^2 Y(z)} - 2r \cos \theta_o \cdot \underbrace{z Y(z)} + \underbrace{r^2 Y(z)} = \underbrace{z^2 X(z)} - \underbrace{X(z)}$$

$$\Rightarrow y(k+2) - 2r \cos \theta_o \cdot y(k+1) + r^2 y(k) = x(k+2) - x(k)$$

en posant $n=k+2$:

$$y(n) - 2r \cos \theta_o \cdot y(n-1) + r^2 y(n-2) = x(n) - x(n-2)$$

Avantages de la méthode récursive:

- ☒ nécessite peu de stockage
- ☒ calcul en "temps réel" (au cours de l'acquisition du signal d'entrée)

Limitations:

- ☒ Précision *finie* de la représentation numérique des coefficients de l'équation aux différences

↓ Problème d'arrondie numérique: La dérive des pôles en dehors du cercle unité rend le système instable

Transformation bilinéaire:

L'analogie numérique d'un système analogique peut être obtenue en choisissant une réponse fréquentielle du système numérique $G_n(f)$ de même *allure* que son équivalent analogique

Problème: $G_n(f)$ est *périodique* alors que $G_a(f)$ ne l'est pas.

✉ La transformation $G_a(f) \rightarrow G_n(f)$ doit "compresser" l'axe des fréquences sur une période de $G_n(f)$

✉ Cette opération peut être réalisée par une *transformation bilinéaire*, définie par:

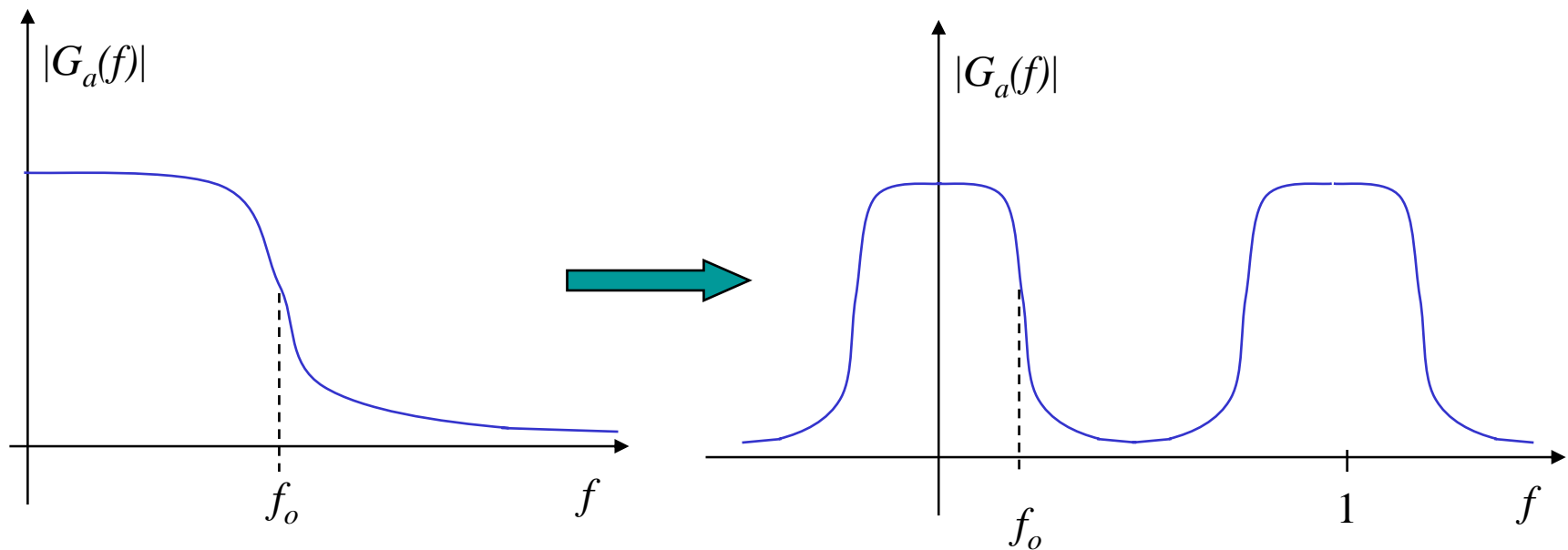
$$s \rightarrow \frac{z-1}{z+1} = u \quad \longrightarrow \quad \text{pour } s = i2\pi f: \quad u = i \cdot \operatorname{tg} \frac{2\pi f}{2}$$

$\Leftrightarrow u$ décrit tout l'axe imaginaire lorsque f varie sur une seule période

$$\longrightarrow \quad G_a(s) \xrightarrow{s \rightarrow u} G_a(u) = G_a\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = G_n(z)$$

Filtre de Butterworth numérique d'ordre n:

$$G_a^2(s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{s_o}\right)^{2n}} \rightarrow G_n^2(z) = \frac{1}{1 + \left(\frac{z-1}{s_o(z+1)}\right)^{2n}}$$



✉ [Interactive Digital Filter Design](#)

✉ [Web-based Filter design](#)

