



Chapitre 9 : Fibres optiques

SOMMAIRE

- 1. Introduction
- 2. Guides d'ondes diélectriques
 - Equations de passage
 - Réflexion totale
 - Onde évanescente
- 3. Types de fibres optiques
- 4. Fibre optique à saut d'indice
 - Composantes axiales des champs
 - Composantes transverses
 - Equation de dispersion
odes TE et TM
rides HE et EH
 - Modes LP dans l'approximation du guidage faible
- 5. Télécommunications optiques
 - Atténuation
 - Dispersion intermodale
 - Dispersion chromatique
 - Multiplexage fréquentiel (WDM)



Introduction : Fibres optiques

- Emergence dans les années 60
- Développement en parallèle avec celui des composants optoélectroniques
- Domaines d'applications : télécommunications optiques, capteurs optiques, opto-microondes, médical, ...

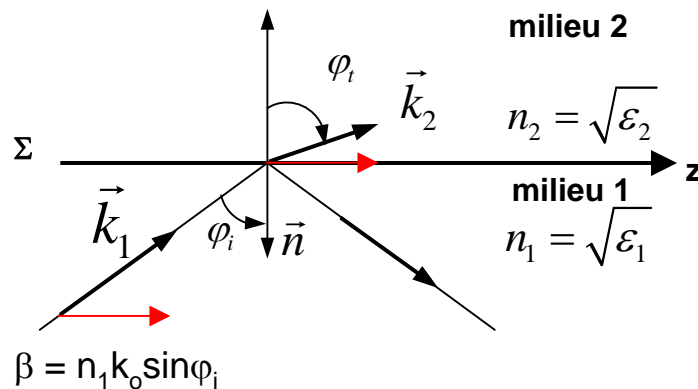
AVANTAGES

- ❑ Très faible atténuation :
 - 0,2 dB/km à $\lambda = 1,55 \mu\text{m}$
- ❑ Très large bande passante sur fibre monomode
- ❑ Multiplexage en longueur d'onde WDM
- ❑ Dimensions, poids, flexibilité
- ❑ Immunité aux interférences électromagnétiques.

INCONVENIENTS

- ❑ Coût d'installation élevé
- ❑ Couplages optiques délicats :
 - Le cœur mesure quelques μm .
- ❑ Utilisation d'interfaces optoélectroniques (Mais évolution vers les réseaux « tout optique »).

Réflexion sur un dioptre plan



Notations:

$$k_0 = \frac{\omega}{c}$$

$$k_1 = n_1 \frac{\omega}{c} = n_1 k_0$$

$$k_2 = n_2 \frac{\omega}{c} = n_2 k_0$$

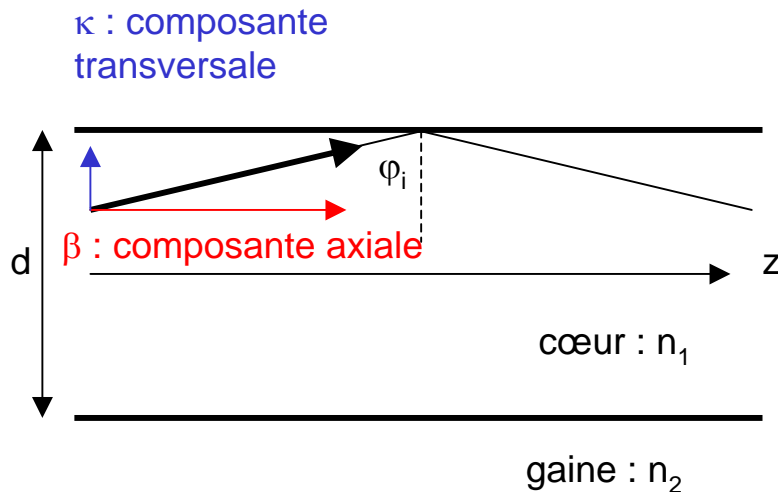
- Equations de passage
 - milieux non absorbants
 - indices $n_1 > n_2$
- Conservation des composantes tangentielles des champs E et H
- Conservation de β :
 - Loi de Snell-Descartes:

$$n_1 \sin \varphi_i = n_2 \sin \varphi_t$$

- Réflexion totale pour $\varphi_t = \pi/2$
 - Angle d'incidence critique:

$$\sin \varphi_c = \frac{n_2}{n_1}$$

Exemple : guide d'onde plan



Réflexion totale : $\varphi_i > \varphi_c$

- Guidage par réflexion totale pour:

$$\varphi_c \leq \varphi_i \leq \pi/2$$

- Pas de perte par réflexion !

- Contrainte sur β : $\beta = n_1 k_0 \sin \varphi_i$

$$\beta \leq n_1 k_0 \quad \text{car} \quad \varphi_c \leq \varphi_i \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\sin \varphi_i \geq \frac{n_2}{n_1}$$

$$\beta \geq n_1 k_0 \sin \varphi_c = n_2 k_0$$

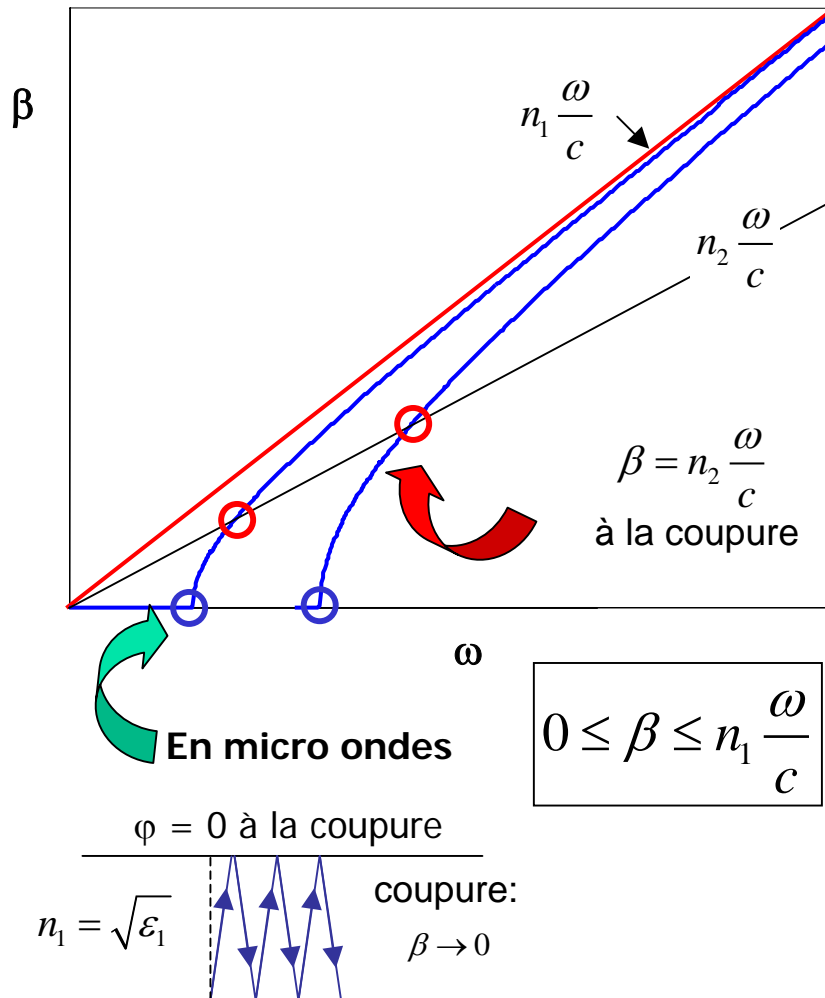
$$\boxed{n_2 k_0 \leq \beta \leq n_1 k_0}$$

- Comparaison avec le guide métallique

- Onde évanescente

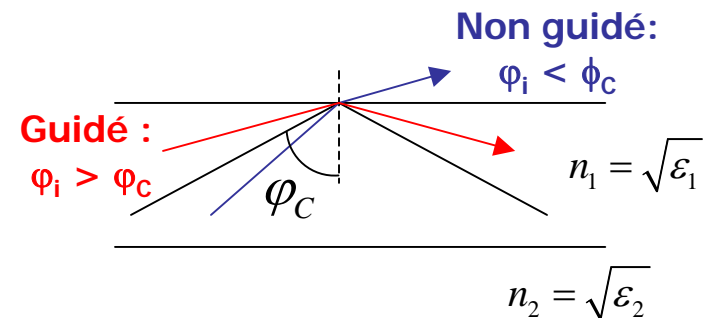
- Onde liée à la surface dans le milieu 2
- Décroissance rapide des champs
- permet d'assurer la continuité des composantes tangentielles des champs

Coupure des modes: guide métallique et guide diélectrique

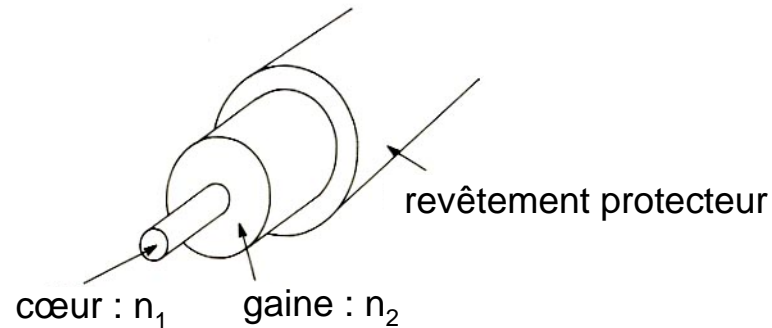


En optique

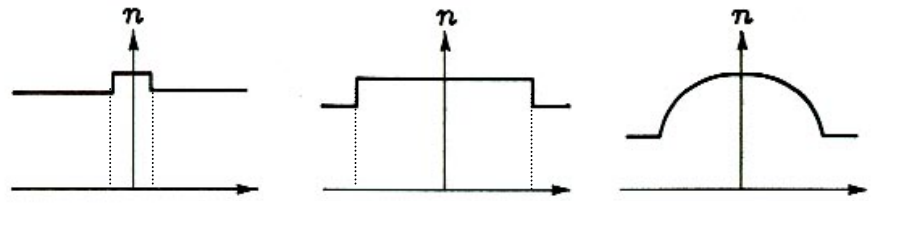
$$n_2 \frac{\omega}{c} \leq \beta \leq n_1 \frac{\omega}{c}$$



Types de fibres optiques



Constitution d'une fibre optique



a) Monomode
diamètre = 5 à 8 μm

b) Multimode
saut d'indice
 $a = 50 \mu\text{m}$

c) Multimode
gradient d'indice



Composantes axiales des champs

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial f(r, \phi)}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f(r, \phi)}{\partial \phi^2} + \left[\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \varepsilon_r - \beta^2 \right] f(r, \phi) = 0$$

- Equation d'onde en coordonnées cylindriques (E_z ou H_z)

$$f(r, \phi) = R(r)\Phi(\phi)$$

- Séparation des variables

$$\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + n^2 = 0$$

- Solution périodique en ϕ
 - $n = 0, 1, 2, \dots$

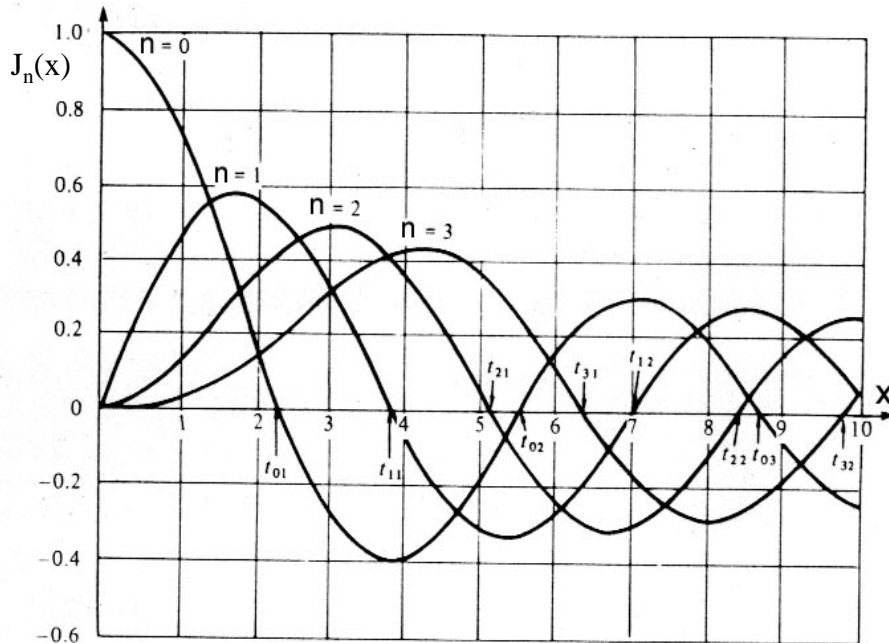
$$\Phi = C \cos(n\phi) + D \sin(n\phi)$$

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial R}{\partial r} \right] + (r^2 \kappa^2 - n^2) R = 0$$

- Fonction de BESSEL

$$\kappa^2 = \varepsilon_r \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - \beta^2$$

Solution pour $r < a$ (cœur)



Fonctions de Bessel de première espèce

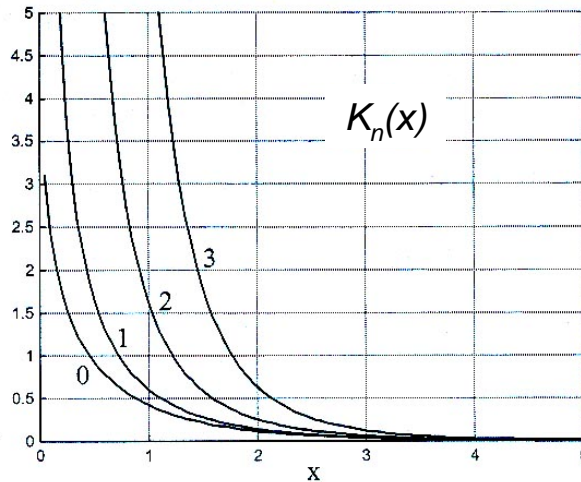
$$r \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial R}{\partial r} \right] + (r^2 \kappa^2 - n^2) R = 0$$

- Dans le cœur :
 $\kappa_1^2 = \varepsilon_1 \frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2 = n_1^2 k_0^2 - \beta^2 > 0$
- Les champs restent finis :
 $R(r) = C_1 J_n(\kappa_1 r)$
- $J_n(x)$ est la fonction de Bessel de première espèce
- Composantes axiales des champs: solutions possibles

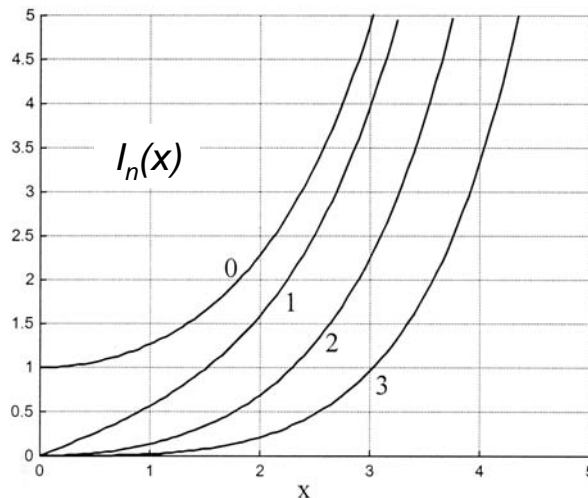
$$\left. \begin{aligned} E_{1z}(r, \phi) &= E_1 J_n(\kappa_1 r) \sin(n\phi) \\ H_{1z}(r, \phi) &= H_1 J_n(\kappa_1 r) \cos(n\phi) \end{aligned} \right\} TE \quad (n \neq 0)$$

$$\left. \begin{aligned} E_{1z}(r, \phi) &= E_1 J_n(\kappa_1 r) \cos(n\phi) \\ H_{1z}(r, \phi) &= H_1 J_n(\kappa_1 r) \sin(n\phi) \end{aligned} \right\} TM \quad (n \neq 0)$$

Solution pour $r > a$ (gaine)



Fonctions de Bessel modifiées de seconde espèce $K_n(x)$ et de première espèce $I_n(x)$.



$$r \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial R}{\partial r} \right] + (r^2 \kappa^2 - n^2) R = 0$$

- Dans la gaine: $\kappa_2^2 = n_2^2 k_0^2 - \beta^2 < 0$
- On pose : $\kappa_2 = j\alpha_2$ *imaginaire pur*
- Solution générale:

$$R(r) = C_2 K_n(\alpha_2 r) + D_2 I_n(\alpha_2 r)$$

- Onde évanescente
- I_n : Fonction de Bessel modifiée de première espèce (croissante)
- Expression des champs (modes TE):

$$E_{2z}(r, \phi) = E_2 K_n(\alpha_2 r) \sin(n\phi)$$

$$H_{2z}(r, \phi) = H_2 K_n(\alpha_2 r) \cos(n\phi)$$

Composantes transversales des champs

Composantes transversales
en fonction des composantes axiales

$$\left. \begin{aligned} E_r &= -\frac{j}{\kappa^2} \left(\beta \frac{\partial E_z}{\partial r} + \omega \mu_0 \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} \right) \\ E_\phi &= -\frac{j}{\kappa^2} \left(\beta \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \omega \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) \\ H_r &= -\frac{j}{\kappa^2} \left(\beta \frac{\partial H_z}{\partial r} - \omega \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} \right) \\ H_\phi &= -\frac{j}{\kappa^2} \left(\beta \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} + \omega \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) \end{aligned} \right\}$$

Variables réduites (sans dimensions):

$$\begin{aligned} u = a\kappa_1 &= a\sqrt{n_1^2 k_0^2 - \beta^2} & \kappa^2 &= \kappa_1^2 = (u/a)^2 \\ w = a\alpha_2 &= a\sqrt{\beta^2 - n_2^2 k_0^2} & \kappa^2 &= -\alpha_2^2 = -(w/a)^2 \end{aligned}$$

Dans le cœur d'indice n_1 ($r < a$) :

$$E_{1z}(r, \phi) = E_1 J_n\left(\frac{u}{a} r\right) \sin(n\phi)$$

$$H_{1z}(r, \phi) = H_1 J_n\left(\frac{u}{a} r\right) \cos(n\phi)$$

$$E_{1\phi} = \left[-E_1 \frac{j\beta}{(u/a)^2} \frac{n}{r} J_n\left(\frac{u}{a} r\right) + H_1 \frac{j\omega\mu_0}{(u/a)} J'_n\left(\frac{u}{a} r\right) \right] \cos(n\phi)$$

$$H_{1\phi} = \left[-E_1 \frac{j\omega\varepsilon_0 n_1^2}{(u/a)} J'_n\left(\frac{u}{a} r\right) + H_1 \frac{j\beta}{(u/a)^2} \frac{n}{r} J_n\left(\frac{u}{a} r\right) \right] \sin(n\phi)$$

Dans la gaine d'indice n_2 ($r > a$) :

$$E_{2z}(r, \phi) = E_2 K_n\left(\frac{w}{a} r\right) \sin(n\phi)$$

$$H_{2z}(r, \phi) = H_2 K_n\left(\frac{w}{a} r\right) \cos(n\phi)$$

$$E_{2\phi} = \left[E_2 \frac{j\beta}{(w/a)^2} \frac{n}{r} K_n\left(\frac{w}{a} r\right) - H_2 \frac{j\omega\mu_0}{(w/a)} K'_n\left(\frac{w}{a} r\right) \right] \cos(n\phi)$$

$$H_{2\phi} = \left[E_2 \frac{j\omega\varepsilon_0 n_2^2}{(w/a)} K'_n\left(\frac{w}{a} r\right) - H_2 \frac{j\beta}{(w/a)^2} \frac{n}{r} K_n\left(\frac{w}{a} r\right) \right] \sin(n\phi)$$

Equation caractéristique

Les composantes tangentielles des champ vérifient les équations de continuité

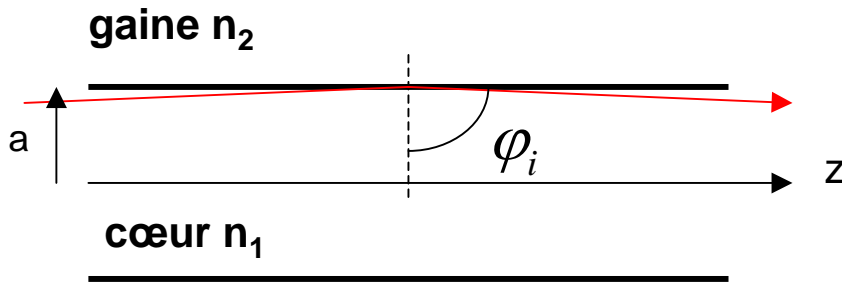
$$E_{1Z}(a) = E_{2Z}(a); \quad H_{1Z}(a) = H_{2Z}(a); \quad E_{1\phi}(a) = E_{2\phi}(a); \quad H_{1\phi}(a) = H_{2\phi}(a);$$

$$\begin{pmatrix} K_n(w) & -J_n(u) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_n(w) & -J_n(u) \\ \frac{j\beta}{(w/a)^2} \frac{n}{a} K_n(w) & \frac{j\beta}{(u/a)^2} \frac{n}{a} J_n(u) & -\frac{j\omega\mu_0}{(w/a)} K'_n(w) & -\frac{j\omega\mu_0}{(u/a)} J'_n(u) \\ \frac{j\omega\varepsilon_0 n_2^2}{(w/a)} K'_n(w) & \frac{j\omega\varepsilon_0 n_1^2}{(u/a)} J'_n(u) & -\frac{j\beta}{(w/a)^2} \frac{n}{a} K_n(w) & -\frac{j\beta}{(u/a)^2} \frac{n}{a} J_n(u) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_2 \\ E_1 \\ H_2 \\ H_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En écrivant que le déterminant est nul, on obtient l'équation caractéristique:

$$\left(\frac{J'_n(u)}{uJ_n(u)} + \frac{K'_n(w)}{wK_n(w)} \right) \left(\frac{n_1^2}{n_2^2} \frac{J'_n(u)}{uJ_n(u)} + \frac{K'_n(w)}{wK_n(w)} \right) = n^2 \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right) \left(\frac{n_1^2}{n_2^2} \frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right)$$

Paramètres de la fibre optique



Guidage : $\varphi_i > \varphi_c$

Pour $\Delta = 2 \cdot 10^{-3}$ et $n_1 = 1,45$

vérifier que $\varphi_c = 86,4$ degrés

**Dans l'approximation du guidage faible,
la lumière se propage pratiquement
parallèlement à l'axe de la fibre**

■ Approximation du guidage faible

- n_1 est voisin de n_2
- Ecart relatif d'indices Δ :

$$\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \approx \frac{n_1 - n_2}{n_1}$$

- Δ est de l'ordre de 0,2 %

■ Ouverture numérique (ON):

$$ON = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

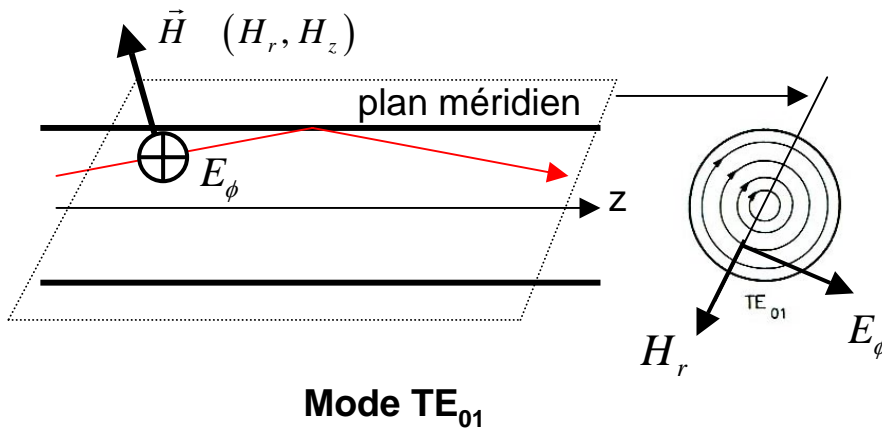
- typiquement 0,1 à 0,3

■ Fréquence réduite V :

$$V^2 = u^2 + w^2 = a^2 k_0^2 (n_1^2 - n_2^2)$$

$$V = \frac{2\pi a}{\lambda_0} (ON)$$

Modes TE et TM – rayons méridiens



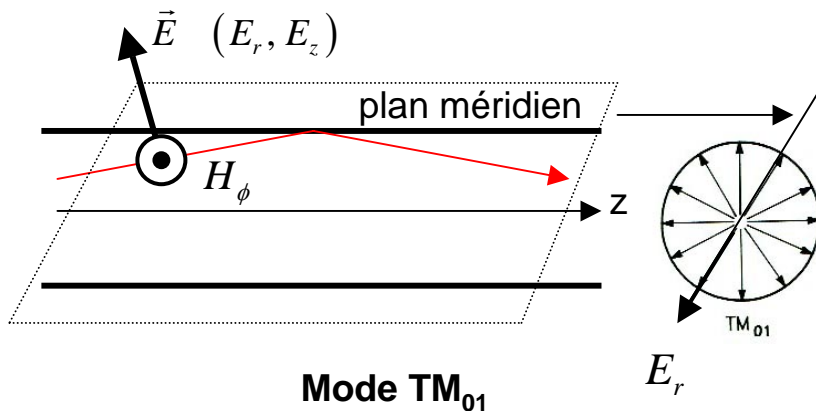
- Pour $n = 0$: symétrie de révolution
 - Champs indépendants de ϕ :
 - Rayons dans un plan méridien
 - modes transverses TE et TM

■ Modes TE :

- $E_z \propto \sin(n\phi); H_z \propto \cos(n\phi)$
- $E_z = 0; \partial H_z / \partial \phi = 0$
- $E_r = H_\phi = 0$

■ Modes TM :

- $E_z \propto \cos(n\phi); H_z \propto \sin(n\phi)$
- $H_z = 0; \partial E_z / \partial \phi = 0$
- $H_r = E_\phi = 0$





Modes TE et TM (équation caractéristique)

- Approximation du guidage faible:

- L'équation caractéristique se simplifie.

$$n_1^2 / n_2^2 = 1 \quad n = 0$$

$$\left(\frac{J'_n(u)}{u J_n(u)} + \frac{K'_n(w)}{w K_n(w)} \right) = \pm n \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right) = 0$$

- Relations de récurrence des fonctions de Bessel:

$$J'_0(u) = -J_1(u)$$

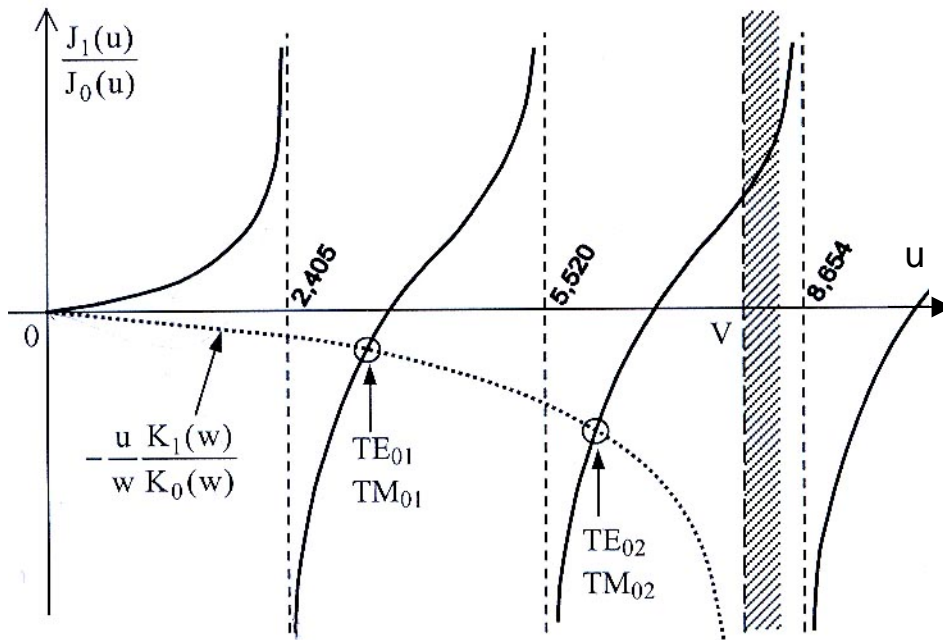
$$K'_0(w) = -K_1(w)$$

- On obtient compte tenu de la relation: $u^2 + w^2 = V^2$

$$\frac{J_1(u)}{J_0(u)} = -\frac{u}{w} \frac{K_1(w)}{K_0(w)} = -\frac{u}{\sqrt{V^2 - u^2}} \frac{K_1(\sqrt{V^2 - u^2})}{K_0(\sqrt{V^2 - u^2})}$$

- Résolution graphique à l'aide d'un logiciel scientifique (MATLAB)

Résolution graphique – modes TE et TM



Détermination graphique des modes TE et TM

- a) Pour $V = 8$, on dénombre 4 modes
- b) Pour $V < 2,405$ aucun mode transverse

■ Utilisation d'un logiciel scientifique

- Posons:

$$f_1(u) = \frac{J_1(u)}{J_0(u)}$$

$$f_2(u) = -\frac{u K_1(w)}{w K_0(u)} = -\frac{u}{\sqrt{V^2 - u^2}} \frac{K_1(\sqrt{V^2 - u^2})}{K_0(\sqrt{V^2 - u^2})}$$

- Pour une valeur de V donnée, on trace f_1 et f_2 en fonction de u

$$f_1 \rightarrow \pm \infty \text{ pour } u = t_{0m} \quad (J_0 = 0)$$

$$f_2 \rightarrow -\infty \text{ pour } u \rightarrow V$$

- L'intersection des deux courbes donne:

- Le nombre de modes excités (fonction croissante de V)
- La valeur de β en fonction de V .

■ Coupure des modes TE_{0m} et TM_{0m}

- pour $V < t_{0m}$ (racine $m^{\text{ième}}$ de J_0)



Modes hybrides

- Pour $n \neq 0$ on perd la symétrie cylindrique:
 - Les rayons ne sont plus contenus dans des plans méridiens
 - Modes hybrides : $H_z \neq 0$ et $E_z \neq 0$

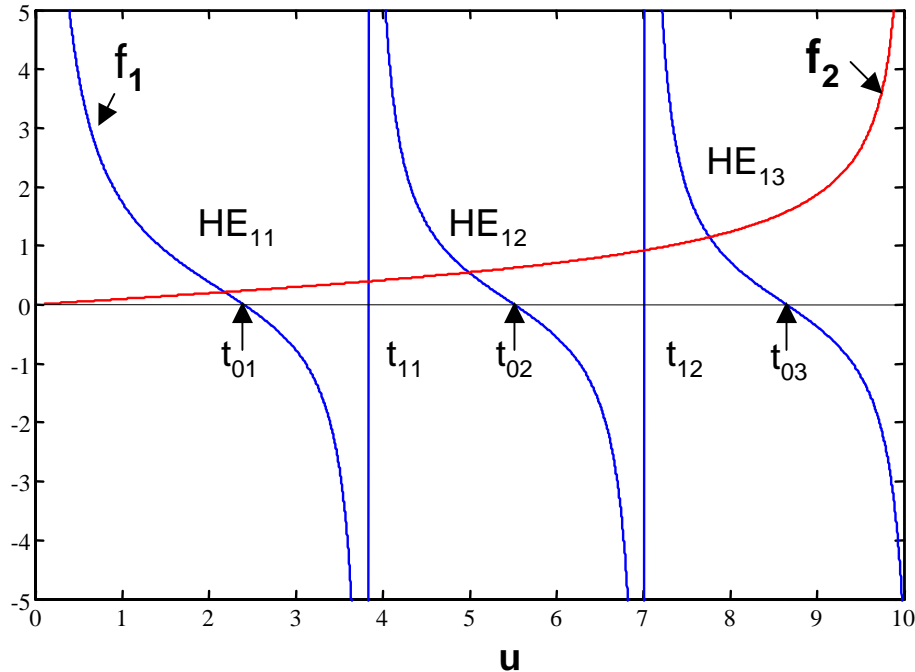
- Approximation du guidage faible
$$\left(\frac{J'_n(u)}{u J_n(u)} + \frac{K'_n(w)}{w K_n(w)} \right) = \pm n \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right)$$

- signe + : modes EH_{nm} (caractère transverse électrique dominant) $E_z \square H_z$
signe - : modes HE_{nm} (caractère transverse magnétique dominant) $H_z \square E_z$
- Relations de récurrence des fonctions de Bessel:

$$\frac{J'_n(u)}{u J_n(u)} = -\frac{J_{n+1}(u)}{u J_n(u)} + \frac{n}{u^2} = \frac{J_{n-1}(u)}{u J_n(u)} - \frac{n}{u^2}$$

$$\frac{K'_n(w)}{w K_n(w)} = -\frac{K_{n+1}(w)}{w K_n(w)} + \frac{n}{w^2} = -\frac{K_{n-1}(w)}{w K_n(w)} - \frac{n}{w^2}$$

Modes HE_{1m}



Résolution graphique des modes HE_{1m}
Trois modes possibles pour $V = 10$

Mode fondamental :
Le mode HE_{11} est toujours guidé

- Les modes HE_{nm} (signe -) sont solution de l'équation caractéristique :

$$\frac{J_{n-1}(u)}{u J_n(u)} = \frac{K_{n-1}(w)}{w K_n(w)}$$

- Cas $n = 1$:
$$\frac{J_0(u)}{u J_1(u)} = \frac{K_0(w)}{w K_1(w)}$$

- Résolution graphique:

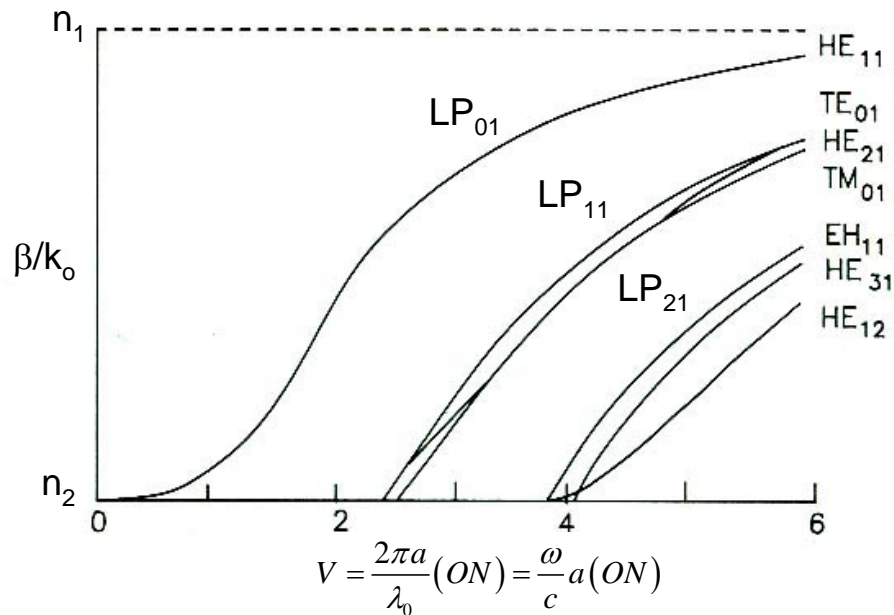
$$f_1 = \frac{J_0(u)}{J_1(u)} \quad f_2 = \frac{u K_0(w)}{w K_1(w)}$$

$$w = \sqrt{V^2 - u^2} \quad f_2 \rightarrow \infty \quad \text{quand} \quad u \rightarrow V$$

- Coupure des modes

- Le mode HE_{1m} coupe pour $V < t_{1,m-1}$
- Le mode HE_{11} à une fréquence de coupure nulle

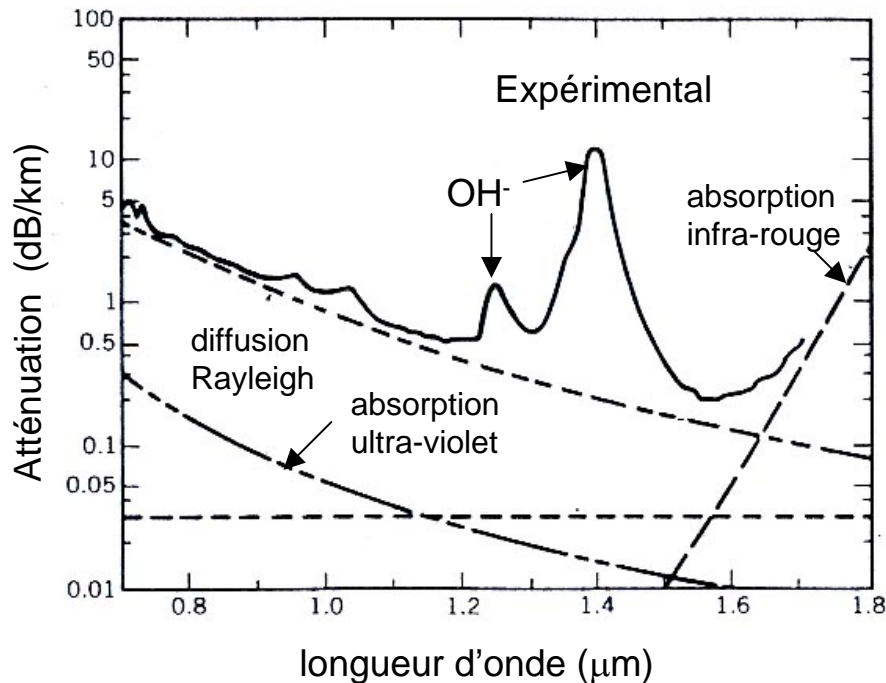
Diagramme de dispersion



**Fibre Monomode: pour $V < 2,405$
seul le mode LP₀₁ peut se propager**

- A une valeur de V correspond
 - Une valeur de u pour chaque mode
 - On en déduit $\beta = \sqrt{n_1^2 k_0^2 - (u/a)^2}$
- Diagramme $\beta = f(V)$
 - Cas général $n_1 \neq n_2$
 - Association en groupes présentant:
 - fréquences de coupure voisines
 - constantes de propagation voisines
- Pseudo-modes LP: Linear Polarization
 - Guidage faible $n_1 \square n_2$
 - Le champ résultant de l'association de ces groupes est à polarisation linéaire

Atténuation d'une fibre monomode



A < 0,2 dB/km autour de $\lambda = 1,55 \mu\text{m}$

- Atténuation A en dB/km

$$A_{(\text{dB/km})} = \frac{10}{L_{(\text{km})}} \log_{10} \frac{P_0}{P_1}$$

- Absorption intrinsèque de SiO₂

- Bande UV de résonances électroniques ($\lambda < 0,4 \mu\text{m}$)
- Bande IR de résonances vibrationnelles ($\lambda > 7 \mu\text{m}$)

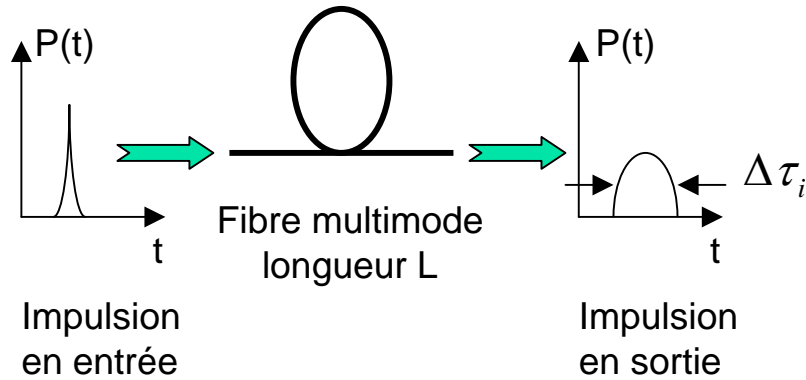
- Diffusion de Rayleigh:

- Variation monotone en $1/\lambda^4$

- Absorption par les impuretés

- Ions OH⁻ essentiellement
- concentration inférieure à 10^{-8}

Dispersion intermodale



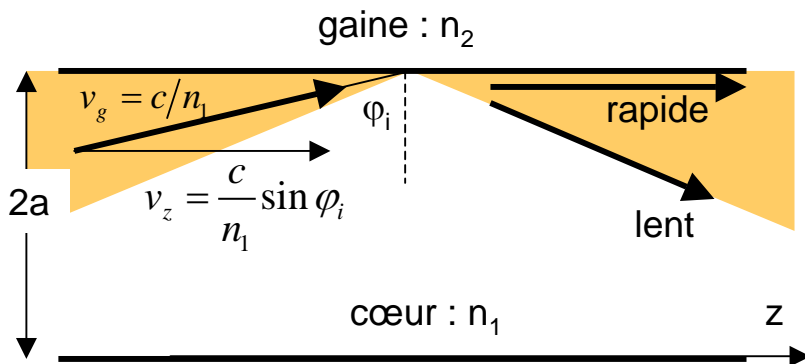
- L'énergie de l'impulsion se répartit entre les différents modes excités
- Les modes se propagent dans une direction φ_i qui dépend du mode: $\varphi_c \leq \varphi_i \leq \pi/2$
- temps de propagation dans la fibre :

$$t = \frac{L}{v_z} = \frac{L n_1}{c \sin \varphi_i}$$

- Modes lents : $\sin \varphi_c = \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow t_1 = \frac{L n_1^2}{c n_2}$
- Modes rapides : $\varphi_i = \pi/2 \Rightarrow t_2 = \frac{L n_1}{c}$

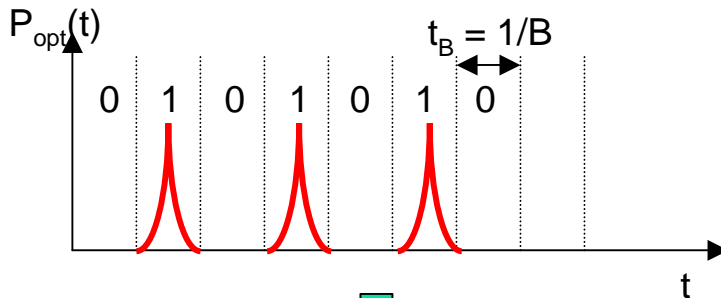
- Elargissement de l'impulsion :

$$\Delta \tau_i \approx t_1 - t_2 = \frac{L n_1}{c} \Delta$$

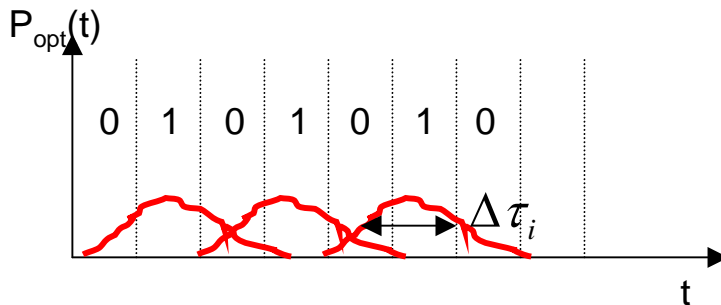


Limitation du débit dans une liaison numérique

Format optique RZ



Après propagation sur une distance L



- Interférences inter-symboles:

$$\Delta\tau_i < t_B$$

- Ordre de grandeur:

- $L = 1\text{km}; n_1 = 1,5; \Delta = 0,003$

$$\Delta\tau_i = \frac{Ln_1}{c} \Delta = \frac{10^3 \times 1,5}{3 \times 10^8} 3 \times 10^{-3} = 1,5 \times 10^{-8} \text{ s}$$

- Débit numérique maximum: $B < \frac{1}{\Delta\tau_i}$

$$B < \frac{10^8}{1,5} \text{ soit } 66 \text{ Mbit/s}$$

- Réduction de la dispersion intermodale par fibre à gradient d'indice

$$\Delta\tau_i^{GI} \propto \frac{Ln_1}{c} \frac{\Delta^2}{8}$$



Dispersion dans une fibre monomode

- Absence de dispersion intermodale
 - Pour $V < 2,405$: un seul mode de propagation (LP_{01})

- Dispersion chromatique:

- Etendue spectrale du signal $\Delta\omega$
 - porteuse optique
 - largeur des impulsions
- Temps de groupe :

- Fibre de longueur L

- Propagation du signal à la vitesse v_g :

$$\tau_g = \frac{L}{v_g} = L \frac{d\beta}{d\omega}$$

- β n'est pas proportionnelle à ω
 - Dispersion de guide d'onde
 - Dispersion matériau: $n_1 = f(\lambda)$
- Etalement des temps de groupes :
 - Les différentes composantes spectrales n'arrivent pas au même instant à l'extrémité de la fibre:

$$\Delta\tau_g = \frac{d\tau_g}{d\omega} \Delta\omega = L \frac{d^2\beta}{d\omega^2} \Delta\omega = L\beta_2 \Delta\omega$$

- Paramètre de dispersion D :

$$D = \frac{1}{L} \frac{\Delta\tau_g}{\Delta\lambda} \quad \text{unité : ps / (km.nm)}$$

- On montrera en exercice:

$$D = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} \beta_2$$



Liaisons haut débit – longue distance

- On utilise le critère précédent :

$$B \Delta \tau_g < 1 \quad \text{soit} \quad B < \frac{1}{L|D|\Delta\lambda}$$

- Le débit maximum est inversement proportionnel à:

- La longueur de fibre : L
- La dispersion de la fibre : D
- La largeur spectrale du signal : $\Delta\lambda$

- Exemple: Calcul du produit BL max

- fibre standard à 1,55 μm
- $\Delta\lambda = 1 \text{ nm}$ (diode laser)

$$BL < \frac{1}{|D|\Delta\lambda} = \frac{1}{17 \times 10^{-12}} \approx 60 \text{ (Gbit / s).km}$$

- Hauts débits – longues distances

- Dispersion

- Réduire la dispersion : limite des effets non linéaires (FWM)
- Réduire $\Delta\lambda$: limité par la bande de modulation du signal $\Delta\nu \propto 1/\Delta T$
- Compensation de la dispersion

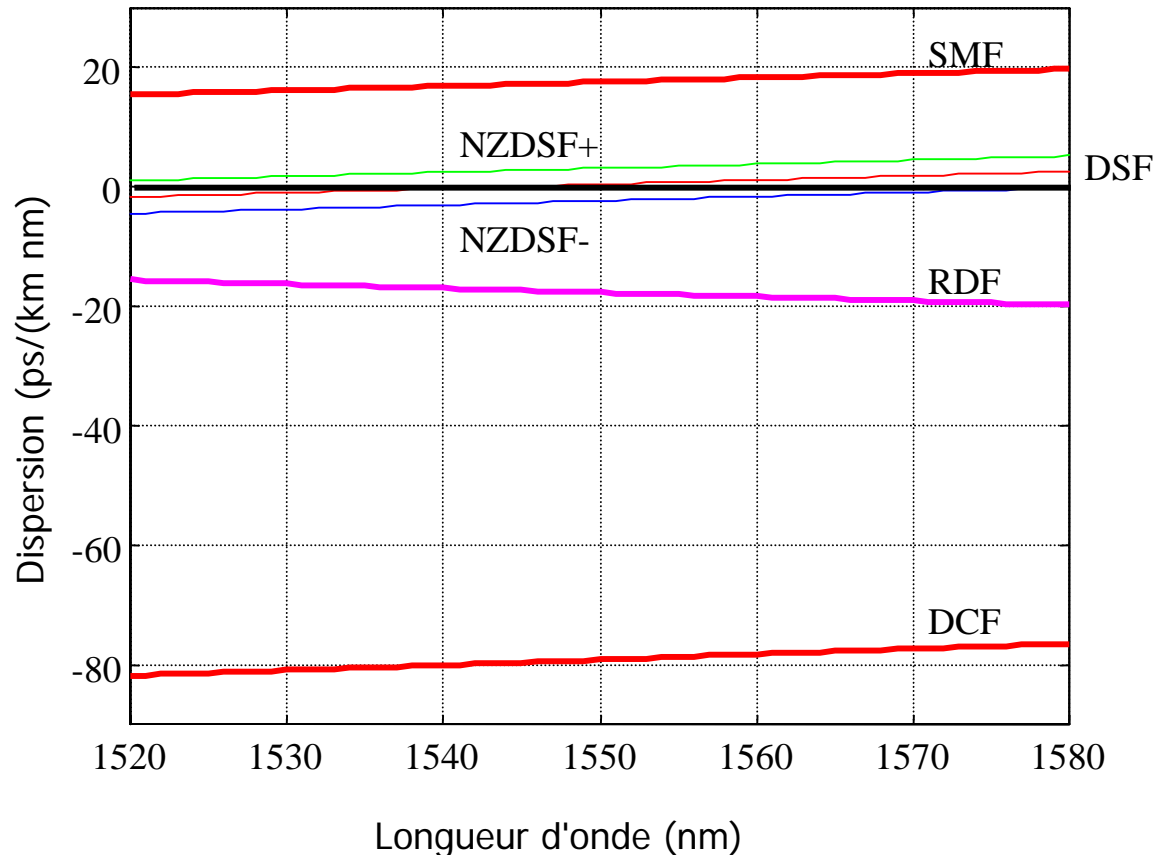
- Atténuation

- Amplificateurs optiques en ligne

- Multiplexage fréquentiel : WDM

- N canaux pour un débit total B_T :
- $B_T = N.B$ (B: débit par canal)

Fibres pour transmissions à 1,55 μm



- SMF: fibre standard.
- DSF : fibre à dispersion décalée.
- NZDF+; NZDSF- : fibre à dispersion non nulle.
- RDF : fibre à pente négative.
- DCF : fibre de compensation

Canaux et amplificateurs WDM

