

GUIDES MICRO-ONDES III.....	2
IV. GUIDE CYLINDRIQUE.....	2
IV.1 – Propriétés générales.....	2
IV.2 – Equation d’onde en coordonnées cylindriques.....	2
IV.3 – Les modes TM.....	4
IV.4 – Composantes transversales des champs	5
IV.5 – Les modes TE.....	6
V. GUIDE COAXIAL – MODE TEM.....	7

GUIDES MICRO-ONDES III

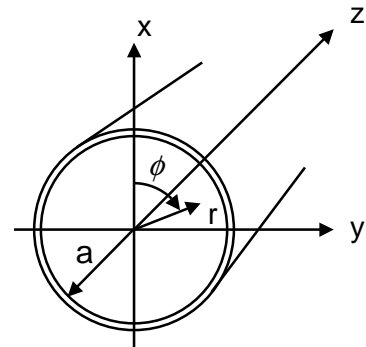
IV. GUIDE CYLINDRIQUE

IV.1 – Propriétés générales

Les propriétés du guide cylindrique sont très voisines de celles du guide rectangulaire : on y retrouve des modes TE_{mn} et TM_{nm} qui présentent des fréquences de coupure et des caractéristiques de propagation similaires. En particulier, il n'existe pas de mode TEM.

La méthode d'analyse est la même que dans le cas du guide rectangulaire, mais nécessite l'utilisation de coordonnées cylindriques r, ϕ, z , rappelées ci-contre.

Par convention, l'indice m se rapporte à la coordonnée radiale et l'indice n à la coordonnée angulaire.



Le guide cylindrique est moins utilisé que la guide rectangulaire, car il ne présente pas de direction de polarisation privilégiée, comme dans le cas du guide rectangulaire, où le mode dominant TE_{10} présente une polarisation E_y parallèle au petit côté.

En contrepartie, la symétrie cylindrique permet la propagation de deux modes identiques, mais de polarisations orthogonales (ce que l'on retrouve également dans les fibres optiques). Les modes sont alors dits « dégénérés ». cette propriété permet de guider une onde de polarisation circulaire ou elliptique.

IV.2 – Equation d'onde en coordonnées cylindriques

En suivant la même méthode qu'au paragraphe précédent, nous commencerons par chercher une solution de l'équation de propagation pour la composante longitudinale du champ, soit :

- La composante E_z , pour les modes TM
- La composante H_z , pour les modes TE

En désignant par f , l'une des composantes longitudinales E_z ou H_z , l'équation de propagation s'écrit :

$$\nabla^2 f + \omega^2 \epsilon \mu_0 f = 0 \quad (8.1)$$

Le laplacien a une expression plus compliquée en coordonnées cylindriques qu'en coordonnées rectangulaires, le calcul (que nous ne ferons pas) donne :

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial f(r, \phi)}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f(r, \phi)}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f(r, \phi)}{\partial z^2} \quad (8.2)$$

L'équation d'onde s'écrit, compte tenu du terme de propagation en $\exp(-j\beta z)$:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial f(r, \phi)}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f(r, \phi)}{\partial \phi^2} + \left[\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \epsilon_r - \beta^2 \right] f(r, \phi) = 0 \quad (8.3)$$

Nous poserons, comme d'habitude :

$$\kappa^2 = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \epsilon_r - \beta^2 \quad (8.4)$$

La méthode de séparation des variables conduit à rechercher, en coordonnées cylindriques, une solution de la forme :

$$f(r, \phi) = R(r) \Phi(\phi) \quad (8.5)$$

$R(r)$ n'est fonction que de la coordonnée radiale r et $\Phi(\phi)$ n'est fonction que la coordonnée azimutale ϕ .

En reportant cette expression dans la relation (8.3) on obtient aisément :

$$\left\{ \frac{r}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial R}{\partial r} \right] + r^2 \kappa^2 \right\} + \frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0 \quad (8.6)$$

Le premier terme entre crochet n'est fonction que de r , alors que le second n'est fonction que de ϕ . La somme ne peut être identiquement nulle que si chaque fonction est égale à une constante.

Fonction angulaire : La fonction Φ doit être périodique, car les champs doivent retrouver la même valeur pour ϕ et pour $\phi + 2\pi$. Nous obtiendrons une solution périodique en posant :

$$\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = -\nu^2 \quad (8.7)$$

et par conséquent :

$$\frac{r}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial R}{\partial r} \right] + r^2 \kappa^2 = \nu^2 \quad (8.8)$$

La solution générale de l'équation (8.7) s'écrit :

$$\Phi = C \cos(\nu\phi) + D \sin(\nu\phi) \quad (8.9)$$

Φ doit satisfaire à la condition :

$$\Phi(0) = \Phi(2\pi) \Rightarrow C = C \cos(2\pi\nu) + D \sin(2\pi\nu) \quad (8.10)$$

Cette condition est satisfaite si ν est un entier de valeur $\nu = n = 0, 1, 2, 3 \dots$

Fonction radiale : La relation (8.8), avec n entier est de la forme :

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial R}{\partial r} \right] + (r^2 \kappa^2 - n^2) R = 0 \quad (8.11)$$

C'est une équation différentielle du second ordre, dont la solution s'exprime à l'aide des fonctions de Bessel (astronome allemand 1784 - 1846). O vérifiera, à titre d'exercice, qu'en effectuant le changement de variable $x = \kappa r$, la relation (8.11) peut se mettre sous la forme canonique :

$$x \frac{\partial}{\partial x} \left[x \frac{\partial y}{\partial x} \right] + (x^2 - n^2) y = 0 \quad (8.12)$$

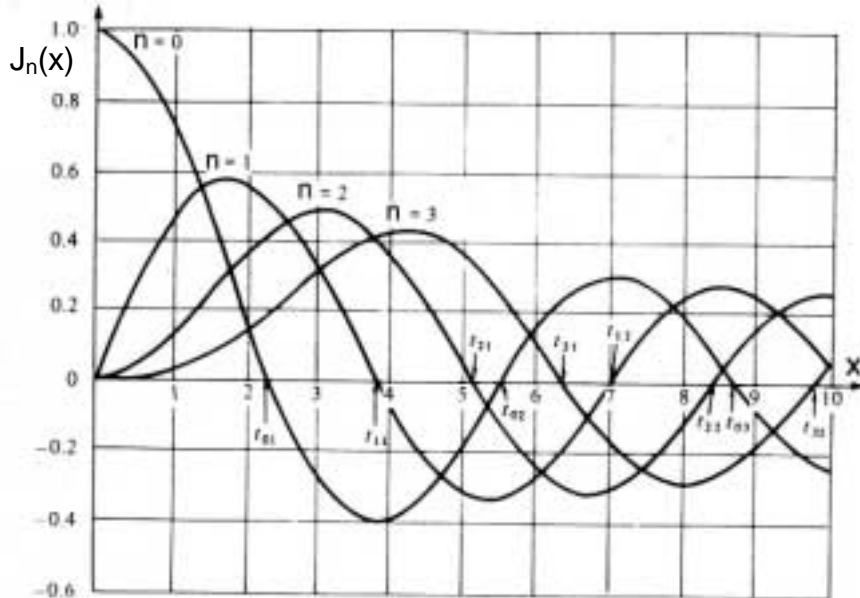
La solution générale de cette équation, pour n entier, s'écrit :

$$y = A J_n(x) + B N_n(x) \quad (8.13)$$

- $J_n(x)$ est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre n ($n = 0, 1, 2, \dots$)
- $N_n(x)$ est la fonction de Bessel de deuxième espèce d'ordre n (ou fonction de Neuman).

Les fonctions de Bessel sont l quivalent cylindrique des fonctions trigonométriques classiques en coordonnées rectangulaires. Leurs valeurs peuvent être trouvées dans tous les logiciels scientifiques.

On a représenté sur la figure ci-dessous les variations de $J_n(x)$ ($n = 0$ à 3) en fonction de x , au voisinage de l'origine :



Ces fonctions sont oscillatoires et gardent une valeur finie au voisinage de $x = 0$ (c'est à dire au centre du guide) pour toutes les valeurs de n . Par contre, elles ne sont pas périodiques, comme les fonctions trigonométriques (les zéro, ou racines de la fonction, désignées par t_{nm} sur la figure, ne sont pas régulièrement espacés).

Les fonctions $N_n(x)$, à l'inverse, tendent vers l'infini au voisinage de l'origine. Le champ ne pouvant pas diverger au centre du guide, nous poserons donc $B = 0$.

La composante longitudinale du champ s'écrit finalement :

$$f(r, \phi) = AJ_n(\kappa r) [C \cos(n\phi) + D \sin(n\phi)] \quad (8.14)$$

Les deux termes entre crochets (en $\sin(n\phi)$ et $\cos(n\phi)$) représentent en fait une même configuration des champs, mais décalée angulairement de $\pi/2n$. Cette indétermination provient du choix arbitraire de l'orientation de l'axe Ox . Nous ne retiendrons que la solution en cosinus qui ne s'annule pas pour $n = 0$.

La solution générale de la composante longitudinale du champ est donc :

$$f(r, \phi) = ACJ_n(\kappa r) \cos(n\phi) \quad (8.15)$$

- La variation radiale est une fonction de Bessel de première espèce.
- La variation angulaire est une fonction trigonométrique.

IV.3 – Les modes TM

La composante axiale du champ électrique E_z des modes TM est donnée par :

$$E_z(r, \phi) = E_0 J_n(\kappa r) \cos(n\phi) \quad (8.16)$$

E_0 étant l'amplitude du champ.

La composante E_z étant tangente aux cylindre conducteur, les conditions aux limites imposent que ce champ soit nul en $r = a$.

Connaissant les valeurs t_{nm} des différentes racines ($m = 1, 2, 3, \dots$) de la fonction $J_n(x)$, ($n = 0, 1, 2, \dots$), indiquées sur la figure ci-dessus, nous pouvons en déduire (avec $x = \kappa r$) :

$$J_n(\kappa a) = 0 \Rightarrow \kappa_{nm} a = t_{nm} \quad (8.17)$$

La composante E_z du mode TM_{nm} s'écrit donc :

$$E_{z,nm}(r, \phi) = E_0 J_n\left(\frac{t_{nm}}{a} r\right) \cos(n\phi) \quad (8.18)$$

Coupure des modes : Reportons la valeur de κ_{nm} dans la relation de dispersion (8.4), pour obtenir la constante de propagation β_{nm} :

$$\beta_{nm} = \sqrt{(\omega/c)^2 \epsilon_r - (t_{nm}/a)^2} \quad (8.19)$$

La pulsation de coupure, qui correspond à $\beta = 0$, vaut :

$$\frac{\omega_{c,nm}}{c} = \frac{\kappa_{nm}}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{t_{nm}}{a\sqrt{\epsilon_r}} \quad (8.20)$$

Et la fréquence de coupure ν_c :

$$\nu_{c,nm} = \frac{\omega_{c,nm}}{2\pi} = \frac{ct_{nm}}{2\pi a\sqrt{\epsilon_r}} \quad (8.21)$$

On donne dans le tableau suivant les valeurs précises des $m = 4$, premières racines t_{nm} , de J_n , pour $0 \leq n \leq 3$:

m	1	2	3	4
t_{0m}	2,405	5,520	8,654	11,792
t_{1m}	3,832	7,016	10,173	13,324
t_{2m}	5,136	8,417	11,620	14,796
t_{3m}	6,380	9,761	13,015	16,223

On notera que la plus faible racine vaut $t_{01} = 2,405$, ce qui fait que le mode TM_{01} possède la plus faible fréquence de coupure de tous les modes TM.

IV.4 – Composantes transversales des champs

Les deux premières équations de Maxwell qui s'écrivent pour des champs harmoniques $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -j\omega\mu_0 \vec{H}$ et $\vec{\nabla} \times \vec{H} = j\omega\epsilon \vec{E}$, permettent d'exprimer les composantes transversales des champs E et H (E_r, E_ϕ, H_r, H_ϕ) en fonction de la composante longitudinale.

En coordonnées cylindriques (r, ϕ, z), le rotationnel du champ électrique, par exemple, s'écrit :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \frac{\partial E_\phi}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left(\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\phi + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(rE_\phi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \phi} \right) \vec{u}_z \quad (8.22)$$

On est donc conduit au système suivant d'équations :

$$r \quad \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} + j\beta E_\phi = -j\omega\mu_0 H_r \quad (8.23) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} + j\beta H_\phi = j\omega\epsilon E_r \quad (8.24)$$

$$\phi \quad -j\beta E_r - \frac{\partial E_z}{\partial r} = -j\omega\mu_0 H_\phi \quad (8.25) \quad -j\beta H_r - \frac{\partial H_z}{\partial r} = j\omega\epsilon E_\phi \quad (8.26)$$

$$z \quad \frac{1}{r} \frac{\partial(rE_\phi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \phi} = -j\omega\mu_0 H_z \quad (8.27) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial(rH_\phi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial \phi} = j\omega\epsilon E_z \quad (8.28)$$

On calculera, à titre d'exercice, les composantes transversales dans le plan (r, ϕ) , des champs en fonction des composantes axiales E_z et H_z :

$$E_r = -\frac{j}{\kappa^2} \left(\beta \frac{\partial E_z}{\partial r} + \omega \mu_0 \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} \right) \quad (8.29)$$

$$E_\phi = -\frac{j}{\kappa^2} \left(\beta \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \omega \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) \quad (8.30)$$

$$H_r = -\frac{j}{\kappa^2} \left(\beta \frac{\partial H_z}{\partial r} - \omega \epsilon_0 \epsilon_r \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} \right) \quad (8.31)$$

$$H_\phi = -\frac{j}{\kappa^2} \left(\beta \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \omega \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) \quad (8.32)$$

Pour les modes TM, le système se simplifie car $H_z = 0$. Compte tenu de l'expression (8.18), de la composante axiale du champ électrique, E_ϕ est donnée par :

$$E_{\phi, nm} = \frac{j \beta_{nm} a^2 n}{t_{nm}^2 r} E_0 J_n \left(\frac{t_{nm} r}{a} \right) \sin(n\phi) \quad (8.33)$$

On vérifie que cette composante de champ électrique, tangente à la paroi, s'annule effectivement en $r = a$.

IV.5 – Les modes TE

La composante longitudinale H_z , du champ magnétique a la même forme que E_z :

$$H_z(r, \phi) = H_0 J_n(\kappa r) \cos(n\phi) \quad (8.34)$$

La seule composante de champ électrique tangentielle aux parois du guide est E_ϕ . En posant $E_z = 0$, on obtient les composantes transversales des champs en fonction de H_z dans les équations (8.29)   (8.32). La relation (8.30) montre que E_ϕ est proportionnelle à $\partial H_z / \partial r$. La condition aux limites est donc satisfaite en $r = a$ si :

$$\left. \frac{\partial H_z}{\partial r} \right|_{r=a} = \kappa H_0 J'_n(\kappa a) \cos(n\phi) = 0 \quad (8.35)$$

Soit $\kappa a = t'_{nm}$, ou t'_{nm} est le zéro d'ordre m de J'_n . La solution pour les modes TE_{nm} est donnée par :

$$\kappa_{nm} = \frac{t'_{nm}}{a}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (8.36)$$

$$H_{z, nm}(r, \phi) = D J_n \left(\frac{t'_{nm} r}{a} \right) \cos(n\phi) \quad (8.37)$$

On trouve dans le tableau suivant les premières valeurs de t'_{nm} (voir aussi le graphique)

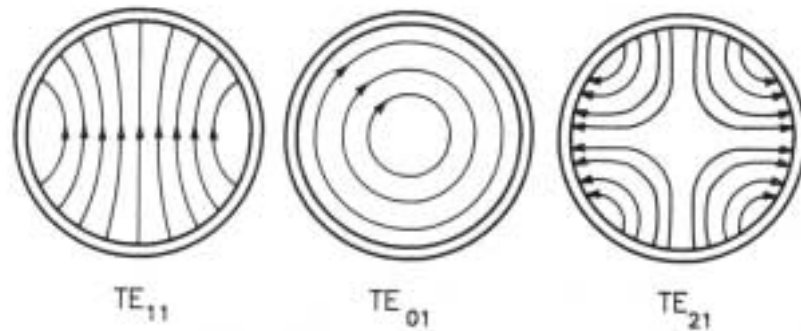
m	1	2	3	4
$t'_{0\pi}$	3,832	7,016	10,173	13,324
$t'_{1\pi}$	1,841	5,331	8,536	11,706
$t'_{2\pi}$	3,054	6,076	9,969	13,170
$t'_{3\pi}$	4,201	8,015	11,346	14,585

Les fréquences de coupure des modes TE_{nm} s'obtient en reportant la valeur (8.36) dans la relation de dispersion (8.4) :

$$v_{c,nm} = \frac{ct'_{nm}}{2\pi a \sqrt{\epsilon_r}} \quad (8.38)$$

- On note que le mode TE_{11} , qui présente la plus basse fréquence de coupure ($t'_{11} = 1,841$) de tous les modes TE ou TM, est le mode dominant.
- Le second mode est le TM_{01} ($t_{01} = 2,405$). Le domaine de fonctionnement monomode du guide cylindrique est donc plus réduit que celui du guide rectangulaire.

La répartition des lignes du champ électrique transverse des modes TE_{11} , TE_{01} et TE_{21} est indiquée sur les figures suivantes :



Pour le TE_{01} ($n = 0$), le champ est indépendant de ϕ . Pour les autres modes, la périodicité est égale à π/n .

Le mode dominant TE_{11} présente une répartition des lignes de champ électrique qui rappelle celle du mode TE_{10} du guide rectangulaire. Pour cette raison, il est courant d'exciter ce mode du guide cylindrique à partir d'un guide rectangulaire.

V. GUIDE COAXIAL – MODE TEM

Ce mode qui peut se propager en espace libre et dans un guide plan présente des avantages sur les autres modes :

- Il présente une fréquence de coupure nulle et une atténuation faible à basse fréquence.
- L'onde électromagnétique se déplace à la vitesse c . La vitesse de groupe ne dépendant pas de la fréquence, la **dispersion est nulle**, ce qui permet une propagation sans déformation du signal.

Sans faire l'étude mathématique complète des modes dans un guide coaxial, cherchons les conditions permettant la propagation du mode TEM. Pour ce mode $E_z = H_z = 0$, le système d'équations (8.23) à (8.28) se simplifie considérablement :

$$\begin{array}{ll} r & \beta E_\phi = -\omega\mu_0 H_r \qquad \qquad \beta H_\phi = \omega\epsilon E_r \\ \phi & \beta E_r = \omega\mu_0 H_\phi \qquad \qquad \beta H_r = -\omega\epsilon E_\phi \\ z & \frac{\partial(rE_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \phi} = 0 \qquad \qquad \frac{\partial(rH_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \phi} = 0 \end{array} \quad (8.39)$$

En posant comme d'habitude $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$, on obtient immédiatement la constante de

propagation $\beta = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_r}$, ainsi que le rapport des champs transverses :

$$H_\phi = \frac{E_r}{\eta} \quad H_r = -\frac{E_\phi}{\eta} \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \epsilon_r}} \quad (8.40)$$

La première solution (E_r, H_ϕ) satisfait aux conditions aux limites sur la paroi conductrice, ce qui n'est pas le cas de la solution (E_ϕ, H_r).

Recherchons l'expression du champ électrique radial. Ecrivons la loi de Gauss en coordonnées cylindriques (voir les ED) :

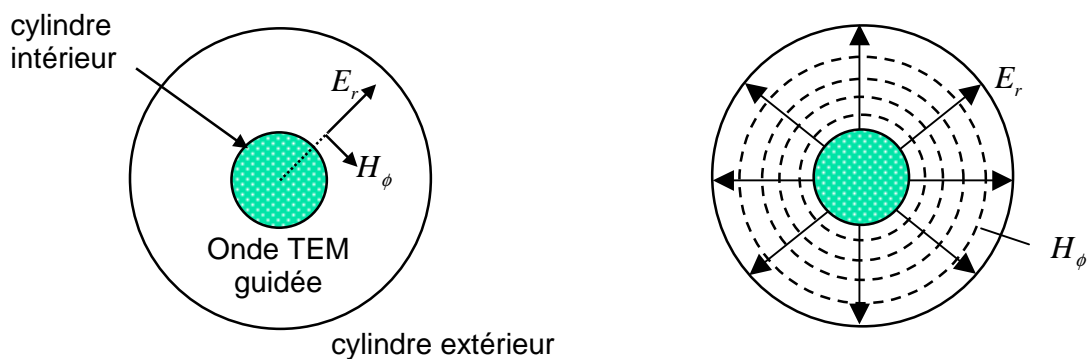
$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rE_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad (8.41)$$

Comme E_z et E_ϕ sont nuls pour le mode cherché, la solution s'écrit, K étant une constante :

$$E_r = \frac{K}{r} \quad H_\phi = \frac{K}{\eta r} \quad (8.42)$$

Ce résultat montre que dans un guide cylindrique ce mode ne peut pas exister, car les champs deviennent infinis sur l'axe en $r = 0$. Il est possible d'isoler cette région centrale, en plaçant dans le cylindre externe de rayon R_2 un second cylindre coaxial de plus petit rayon R_1 , comme indiqué sur la figure :

- Le cylindre central constitue un blindage pour la région axiale, les champs sont nuls à l'intérieur.
- Le cylindre extérieur assure le guidage de l'onde entre les deux cylindres.



Bande passante du mode TEM :

Ces deux champs orthogonaux E_r et H_ϕ , définissent le mode TEM qui existe toujours dans un guide coaxial. La résolution des équations générales montre l'existence d'autres modes qui doivent respecter les conditions aux limites sur les deux cylindres en $r = R_1$ et en $r = R_2$. On met en évidence des modes TE et des modes TM qui ne peuvent exister qu'au dessus d'une fréquence de coupure. Pour obtenir un ordre de grandeur de la fréquence de coupure ν_c du premier mode dans l'air, on peut appliquer la relation (6.21) obtenue dans le cas du guide d'onde plan, en remplaçant la distance a entre les plaques, par la distance $R_2 - R_1$ entre les cylindres, ce qui donne :

$$2\pi\nu_c = \omega_c \square \frac{\pi c}{\sqrt{\epsilon_r}(R_2 - R_1)} \quad (8.43)$$

En prenant $R_2 - R_1 = 1,5$ mm pour un câble coaxial usuel, avec un diélectrique de permittivité $\epsilon_r = 2,1$ (PTFE ou polyéthylène) on trouve en première approximation $\nu_c = 69$ GHz.

La fréquence maximale d'utilisation du mode TEM étant déterminée par cette fréquence de coupure du premier mode d'ordre supérieur, on voit que le câble coaxial peut être utilisé dans le domaine micro ondes.