

Traitement du Signal (Introduction)

«La perception d'un signal est proportionnelle au caractère acceptable, non dérangeant, du contenu.»

Edgar Morin

Mais qu'est-ce qu'un signal ?

Introduction

La grande question : Temps ou fréquence ?

Selon ce que l'on veut faire, on travaille indifféremment dans l'un ou l'autre espace.



Deux représentations d'un même signal.

Un certain nombre d'outils sont disponibles pour changer d'espace :

- Séries de Fourier
- Transformée de Fourier
- Transformée de Fourier à fenêtre
- Transformée en ondelettes
- Etc.

Classification des signaux

La classification des signaux en catégories peut sembler, à première vue, théorique, mais :

Pour chaque rubrique de signaux on définira des traitements bien particuliers.

Classification déterministe-aléatoire

Certains outils sont bien adapter pour manipuler les signaux déterministes et d'autres sont mieux adapter pour les signaux aléatoires.

Déterministes

Ce sont les signaux dont l'évolution en fonction du temps est prévisible par un modèle mathématique approprié (signaux de test, d'étalonnage, etc.).

Aléatoires

Ce sont les signaux qui ont un caractère non-reproductible et imprévisible. Par exemple, les signaux issus de capteurs, de détecteurs ou encore la parole.

Classification énergétique/Puissance

Quelque soit le signal, on peut définir l'énergie du signal (si elle existe) ou la puissance moyenne (si elle existe) :

$|x(t)|^2$ correspond à une énergie instantanée et $E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$ correspond à l'énergie du signal (somme de toutes les énergies instantanées).

et la puissance moyenne :

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt$$

La puissance est l'énergie par unité de temps

Remarque :

- Les signaux tels que $0 < E_x < \infty$ sont des signaux à énergie finie ($P_x = 0$), par exemple, les signaux transitoires.
- Les signaux tels que $0 < P_x < \infty$ sont des signaux à puissance moyenne finie ($E_x = \infty$). Par exemple, les signaux permanents, comme les signaux périodiques ou encore les signaux aléatoires permanents.

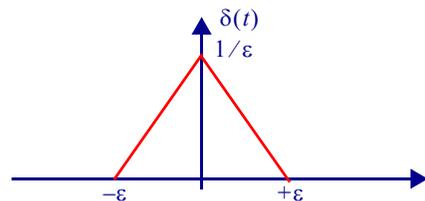
Autres types de signaux

La distribution de Dirac : $\delta(t)$

Propriété : $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$

On peut trouver de nombreuses représentations de la distribution de *Dirac*.

Exemple : on suppose que : $\varepsilon \rightarrow 0$.

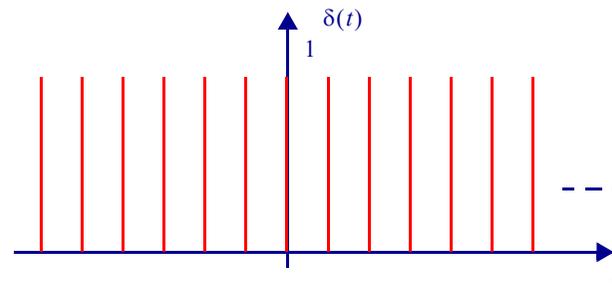


Le peigne de Dirac

Un peigne de *Dirac*, représente une suite d'impulsions de *Dirac* décalées dans le temps.

Le peigne de *Dirac* est défini par la relation suivante :

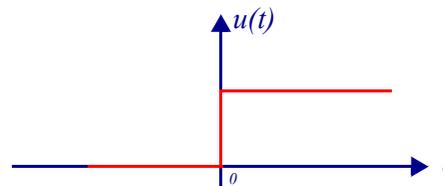
$$p_{ng}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$



Les signaux nuls à gauche

Exemple : l'échelon unité.

La figure représente l'échelon unité $U(t)$



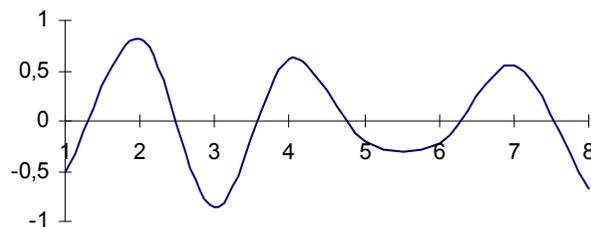
On remarquera que : $\frac{d(U(t))}{dt} = \delta(t)$

Les distributions tempérées sont infiniment dérivables (intégrables).

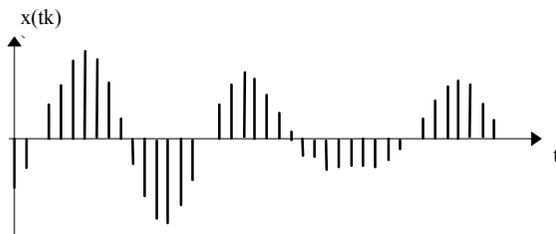
Exemple : Pour spécifier que le signal $x(t)$ est nul pour les temps négatifs, on peut définir un nouveau signal : $x(t) \cdot U(t)$.

Classification continu/discret

Exemple de représentation continue.



Exemple de représentation discrète, dans ce cas la fonction est définie par une suite d'échantillons.



L'intérêt de la représentation discrète est le passage dans le monde numérique.

Représentation vectorielle des signaux

L'intérêt d'une représentation vectorielle

Un signal peut se décomposer selon une combinaison linéaire de fonctions connues

Développement en série de fonctions orthogonales

Simplifie considérablement les calculs, un simple produit scalaire permet d'obtenir un coefficient.

Le produit scalaire est la base du traitement du signal.

$$(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)x_2^*(t)dt$$

Approximation de $x(t)$

L'idée est de chercher l'approximation d'une fonction par un ensemble de composantes connues.

On peut approcher $x(t)$ par $\hat{x}(t)$ défini comme étant la somme pondérée de fonctions :

$$\hat{x}(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i \phi_i$$

L'erreur quadratique donne une mesure absolue de l'approximation :

$$\varepsilon = \|x - \hat{x}\|^2 = \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t) - \hat{x}(t)|^2 dt$$

Théorème de Parseval

L'énergie du signal $x(t)$ est égale à la somme des énergies de chacune de ses composantes et ne dépend pas de son mode de représentation. Ce résultat important est très utilisé en traitement du signal.

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n |a_i|^2$$

Concrètement :

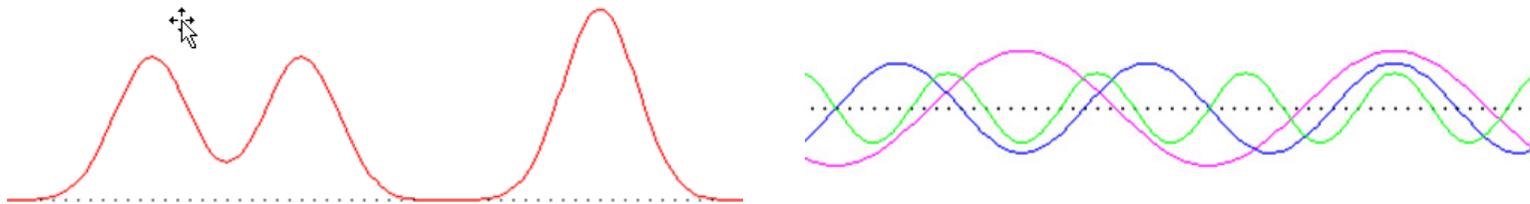
L'énergie d'un signal calculée en temporelle est identique à celle calculée en fréquence (ne dépend pas du mode de représentation).

Série de Fourier

$$\hat{x}(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i \phi_i$$

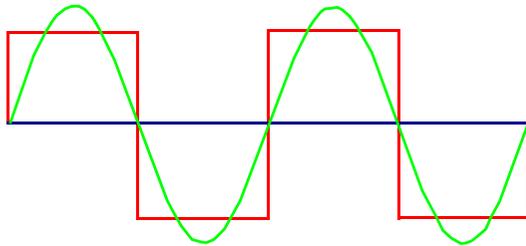
On prend $\phi_k = e^{ik\Omega t}$ (fonction orthogonale, bien adaptée aux fonctions périodiques).

comme $a_k = (x, \phi_k)$ alors les coefficients : $a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) e^{-ik\Omega t} dt$

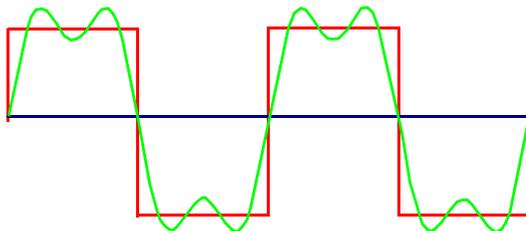


Le signal (à gauche) peut être décomposé en une somme de sinus/cosinus (à droite)

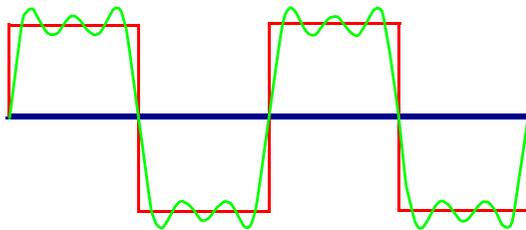
Décomposition en série de Fourier d'un signal rectangulaire



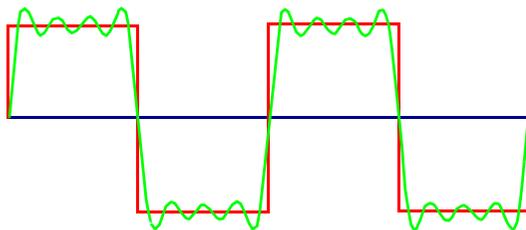
Un seul terme le fondamental



Le fondamental et la première harmonique



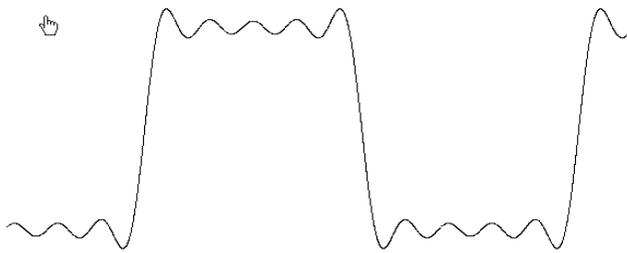
Le fondamental et les deux premières harmoniques



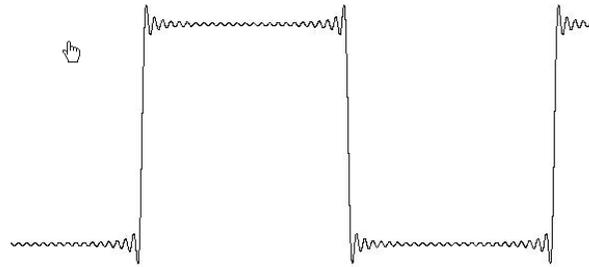
Le fondamental et les trois premières harmoniques

Décomposition en série de Fourier

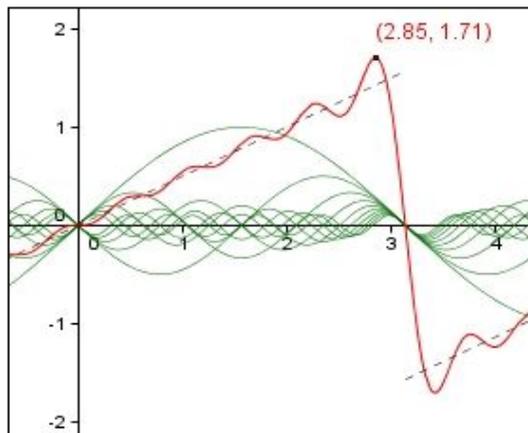
Problèmes de convergence pour les signaux à variation rapide : phénomène de Gibbs



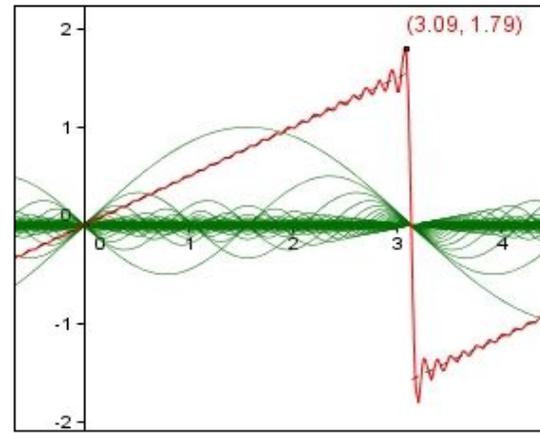
Approximation à l'ordre 10



Approximation à l'ordre 50



$n=10$



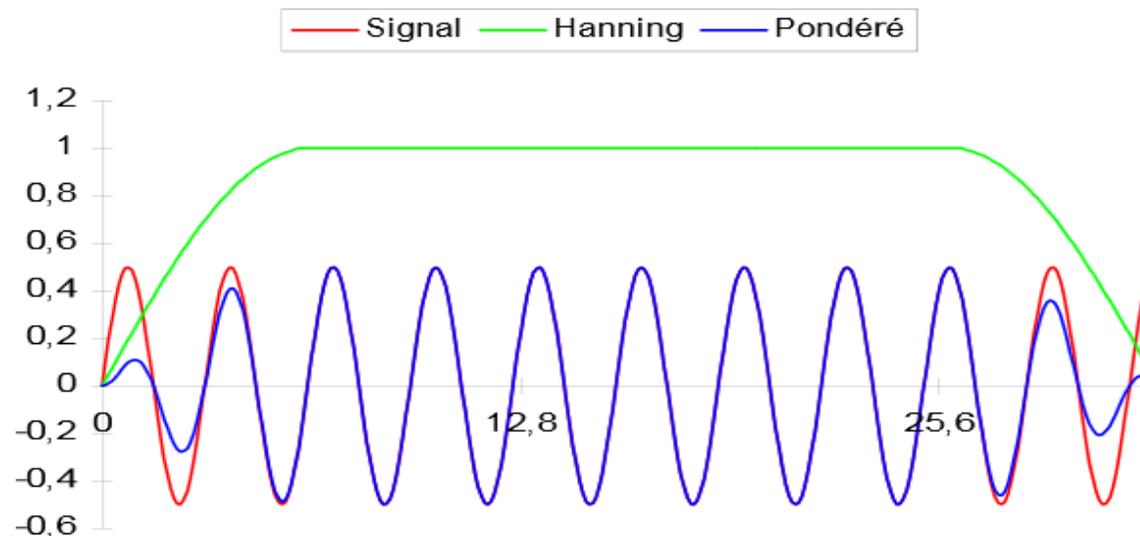
$n=50$

Cas d'une rampe

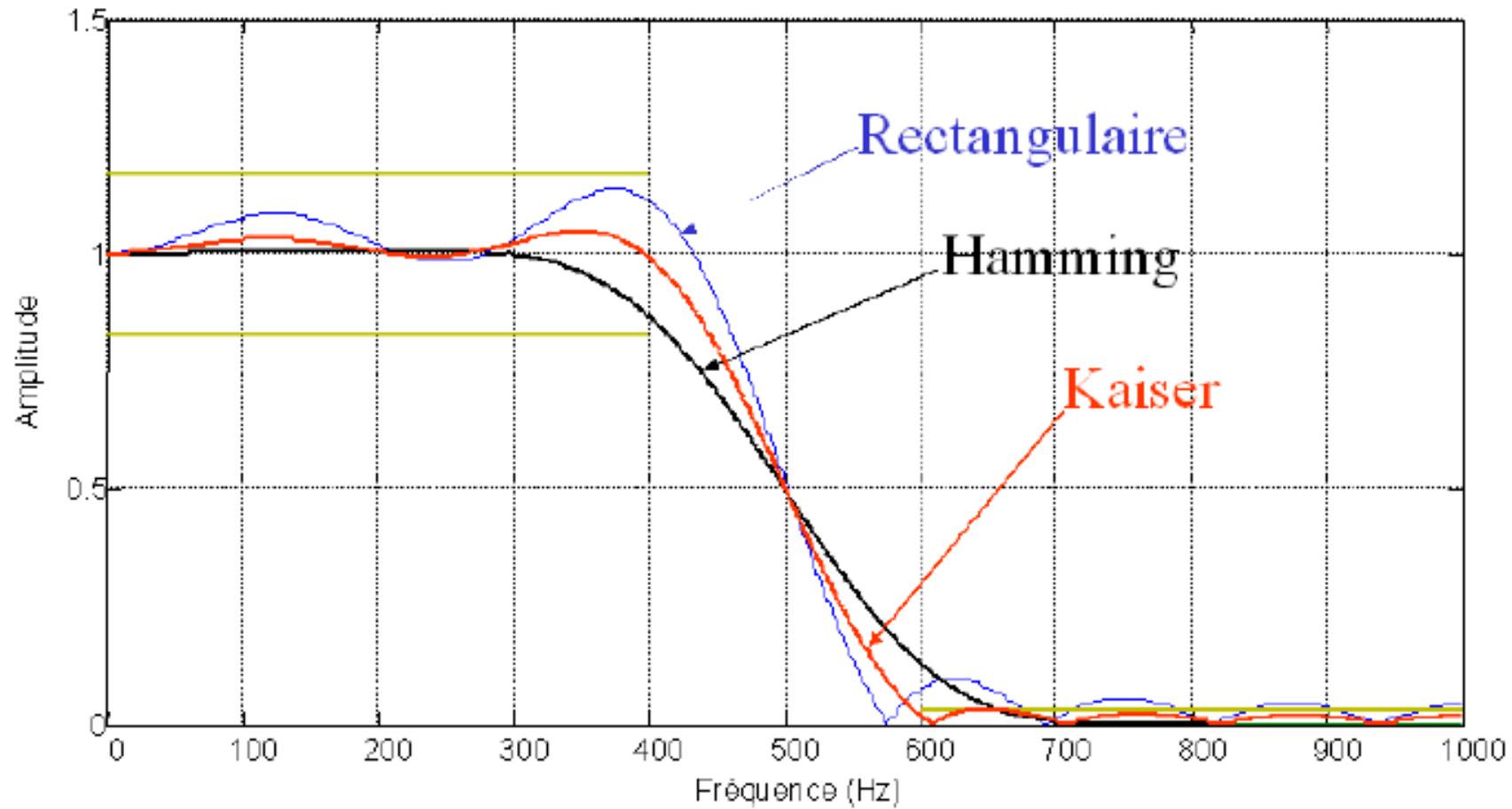
Conséquences du phénomène de Gibbs

Comme le signal que l'on étudie n'est pas dans l'intervalle de temps $[-\infty, +\infty]$ il peut y avoir une transition rapide au début et à la fin du signal quelque soit le signal.

Pour éviter ce phénomène, il faut éviter les transitions rapides sur les bords : Utilisation du fenêtrage. On multiplie le signal par une fenêtre (d'apodisation) à variation douce (Hamming, Hanning, Blackman, Kaiser, etc.).



Exemple de fenêtres



Transformée de Fourier

$$x = \sum_i a_k \phi_k \text{ avec } a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) e^{-ik\Omega t} dt \text{ puis l'on passe à la limite : } T \rightarrow \infty$$

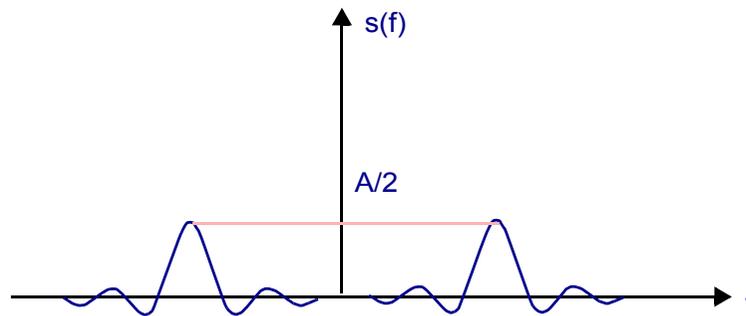
$$\hat{x}(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-2\pi i v t} dt \text{ (construction)}$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(v) \cdot e^{2\pi i v t} dv \text{ (reconstruction)}$$

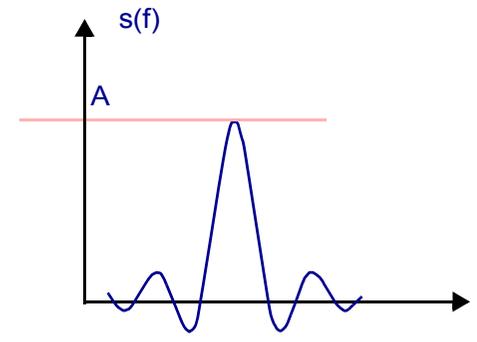
$\hat{x}(v)$ est la représentation spectrale de $x(t)$

La transformée de Fourier est bien adaptée pour tous les types de signaux (périodiques ou non périodiques)

Spectre unilatéral et bilatéral



Spectre bilatéral



Spectre unilatéral

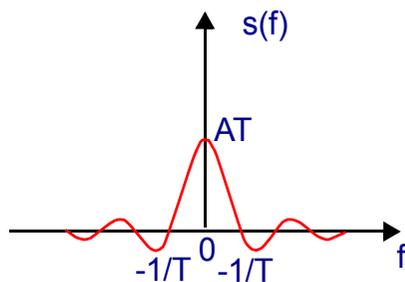
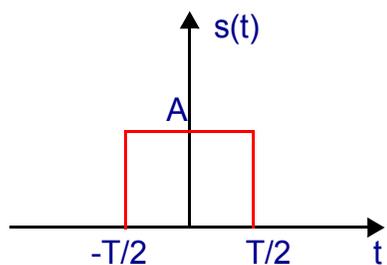
Spectre bilatéral

Attention : La théorie n'interdit pas les fréquences négatives et l'énergie du signal est donc répartie dans les 2 raies.

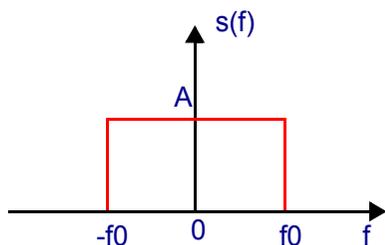
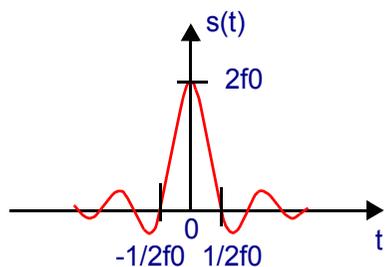
Spectre unilatéral

Le spectre du signal n'est que positif et pour conserver l'énergie la raie à une valeur double.

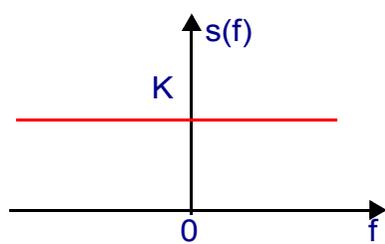
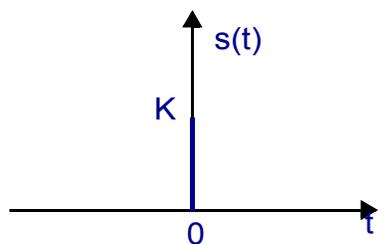
Quelques transformées de Fourier



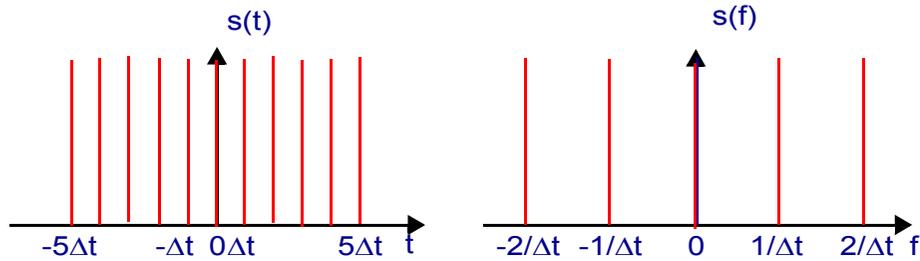
$$S(f) = AT \frac{\sin \pi T f}{\pi T f}$$



$$s(t) = 2A f_0 \frac{\sin 2\pi f_0 t}{2\pi f_0 t}$$

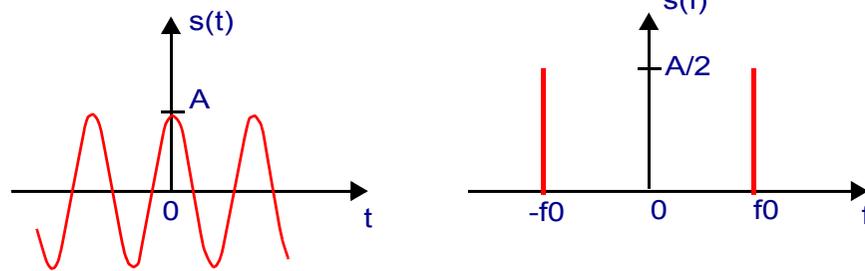


$$s(t) = K\delta(t) \leftrightarrow S(f) = K$$



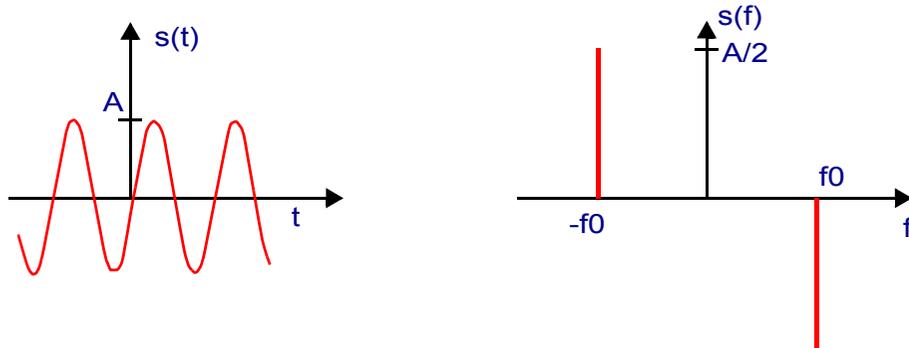
$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - k\Delta t) \leftrightarrow$$

$$S(f) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{\Delta t}\right)$$



$$s(t) = A \cos 2\pi f_0 t \leftrightarrow$$

$$S(f) = \frac{A}{2} \delta(f - f_0) + \frac{A}{2} \delta(f + f_0)$$



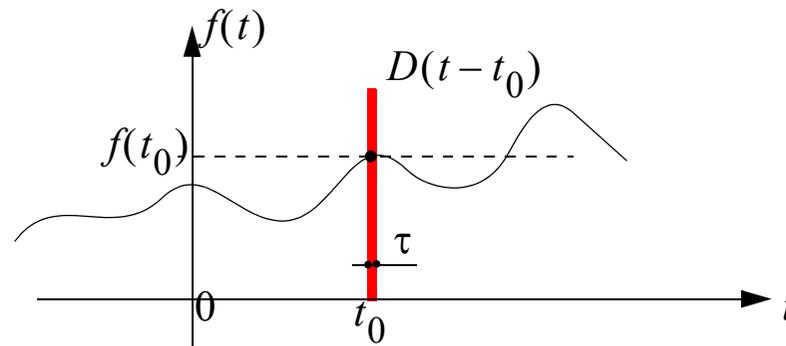
$$s(t) = A \sin 2\pi f_0 t \leftrightarrow$$

$$S(f) = \frac{A}{2i} \delta(f - f_0) - \frac{A}{2i} \delta(f + f_0)$$

L'intégrale de convolution (1)

Considérons le produit d'une fonction $f(t)$ par une impulsion D rectangulaire.

On suppose que D a une largeur τ petite devant la variation de $f(t)$.



Le produit $f(t) \cdot D(t-t_0)$ est égal à la fonction au point t_0 , soit $f(t_0)$.

$$f(t) \cdot D(t-t_0) = f(t_0) \cdot D(t-t_0).$$

$f(t_0)$ est le poids de l'impulsion de D .

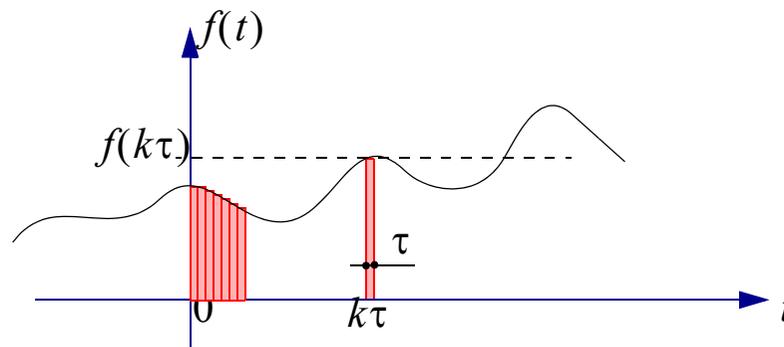
Cette opération correspond à échantillonner $f(t)$ par une impulsion rectangulaire.

L'intégrale de convolution (2)

Approximation d'une fonction par une suite d'impulsions rectangulaires.

On considère 2 fonctions rectangulaires :

- $R_{\tau 0}(t)$ de largeur τ normalisée en amplitude
- $R_{\tau}(t) = \frac{1}{\tau} R_{\tau 0}(t)$ de largeur τ normalisée en surface.



On peut approcher $f(t)$ par $\tilde{f}(t)$:

$$\tilde{f}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k\tau) \cdot R_{\tau}(t - k\tau) \cdot \tau$$

L'intégrale de convolution (3)

Faisons tendre τ vers 0.

$$\tilde{f}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k\tau) \cdot R_{\tau}(t - k\tau) \cdot \tau$$

Dans ce cas : $R_{\tau}(t) \rightarrow \delta(t)$ et $k\tau \rightarrow \theta$
et l'on obtient l'intégrale de convolution :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta) \delta(t - \theta) d\theta$$

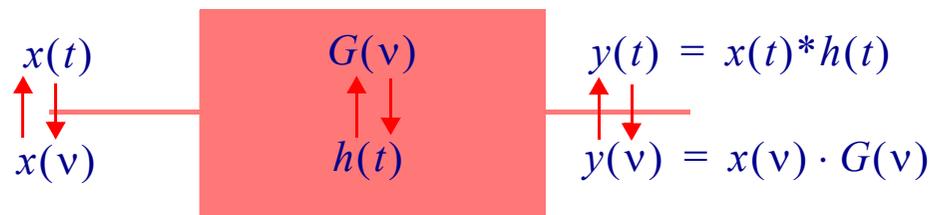
$f(t)$ est " une somme continue de distributions de Dirac pondérées et décalées dans le temps ".

Ce produit de convolution est également noté : $f = f * \delta$

La mesure de Dirac joue le rôle d'unité pour le produit de convolution.

Filtre linéaire et produit de convolution

La réponse impulsionnelle définit complètement un filtre linéaire.

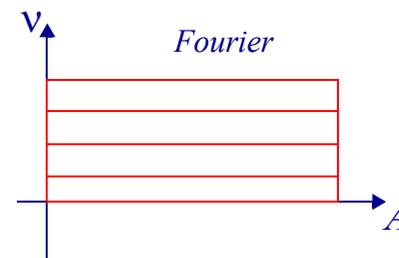
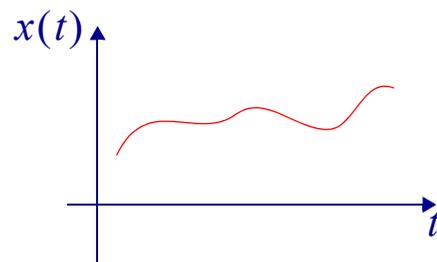


Le gain $G(\nu)$ est la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle.

$G(\nu)$ et $h(t)$ sont 2 représentations (fréquence et temporelle) de la même quantité.

Avantage et limitation de la transformée de Fourier

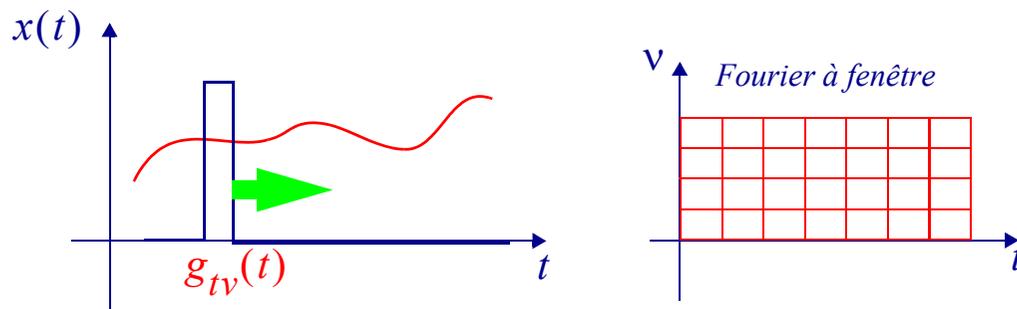
- + : Très bonne résolution fréquentielle (la meilleure !)
- - : Pas de localisation temporelle possible (on somme le signal sur toute son histoire temporelle), on a perdu la notion de temps !



→ Transformée de *Fourier* à fenêtre

Transformée de Fourier à fenêtre

Le signal $x_t(u)$ est analysé au travers la fenêtre g : $x_t(u) = g^*(u-t) \cdot x(u)$



Le principe est simple mais la mathématique devient rapidement compliquée !

On considère une fonction analysante : $g_{tv}(u)$

$$\tilde{x}_t(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_t(u) e^{-2\pi i v u} du$$

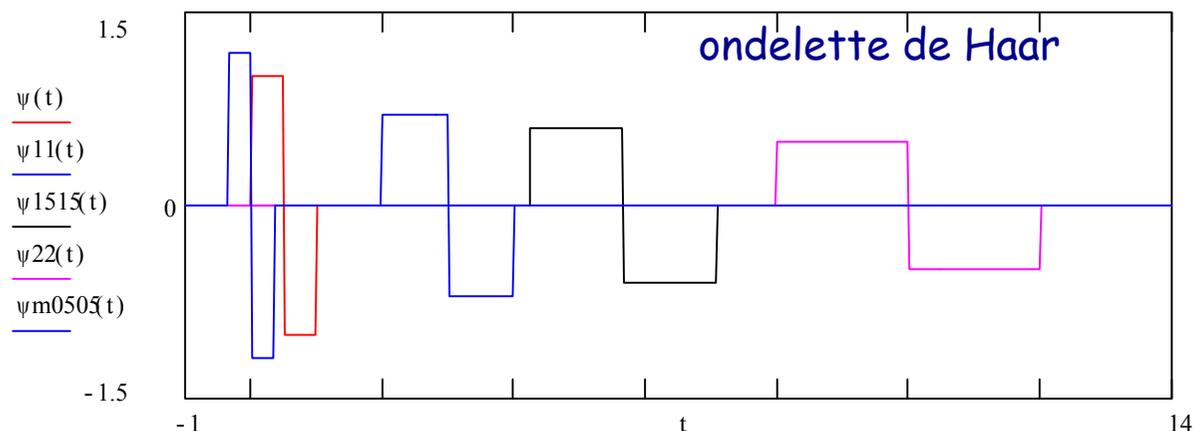
Le signal peut être reconstruit par :

$$x(u) = \frac{1}{\|g\|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_{tv}(u) \tilde{x}_t(v) dv dt$$

De la transformée de Fourier à la transformée en ondelettes

La transformée en ondelettes permet d'avoir une localisation en fréquence et en temps.

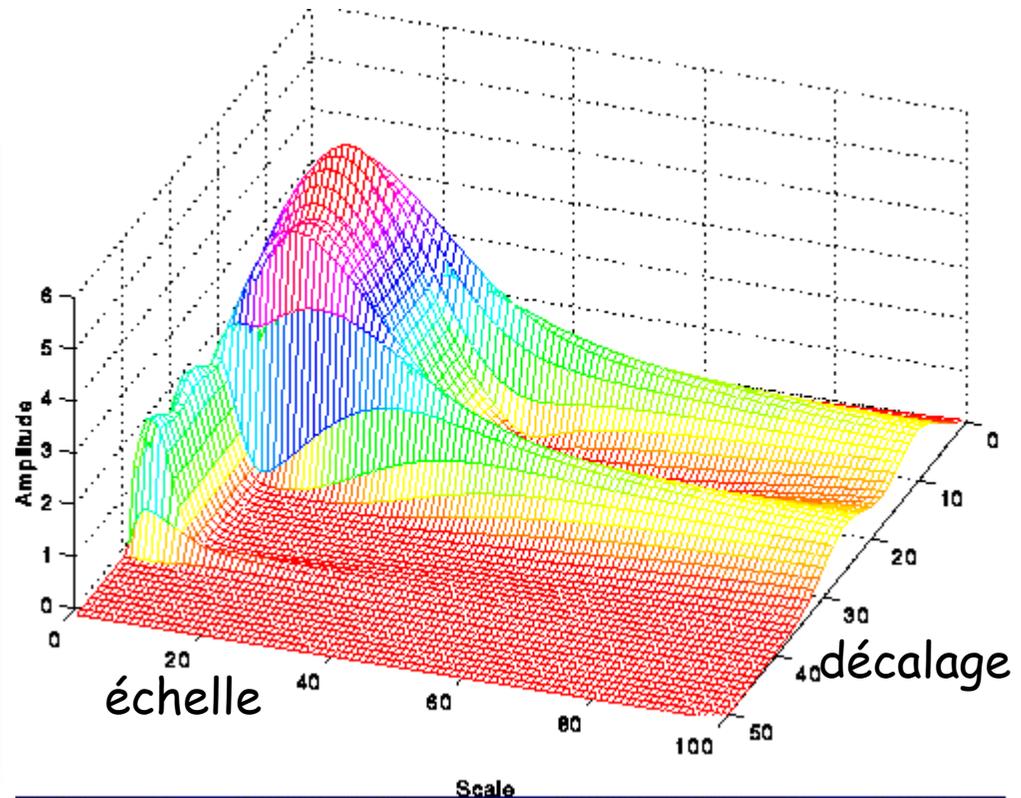
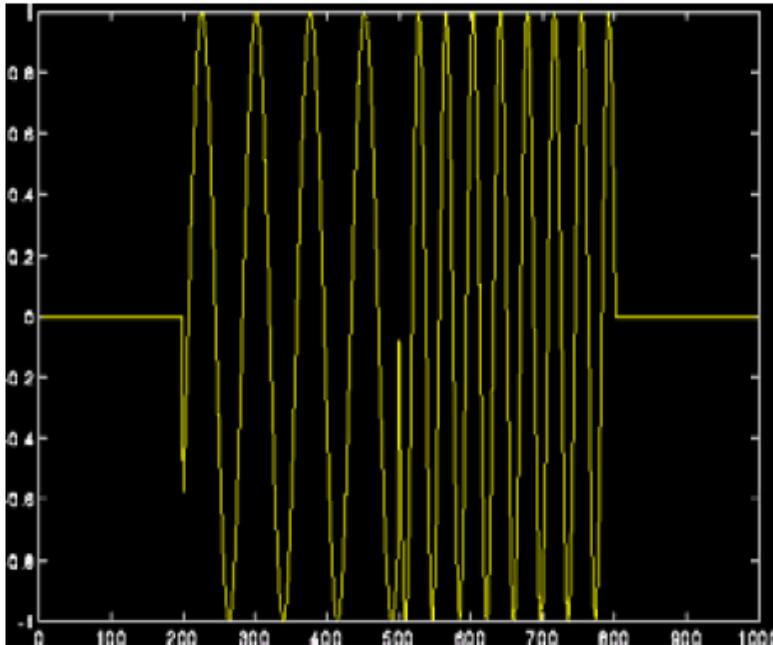
$$\Psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$



a traduit le changement d'échelle et b la translation.

$$\tilde{x}(a,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \frac{1}{\sqrt{a}} \Psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \text{ et } x(t) = C_{\Psi}^{-1} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{x}(a,b) \frac{1}{\sqrt{a}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) db \frac{da}{a^2}$$

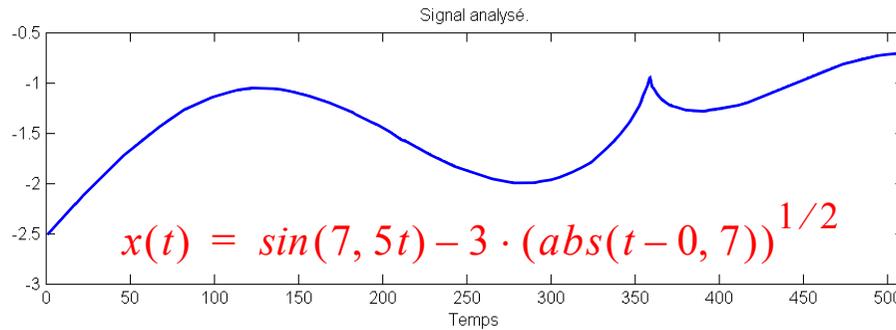
Exemple d'un signal non-stationnaire



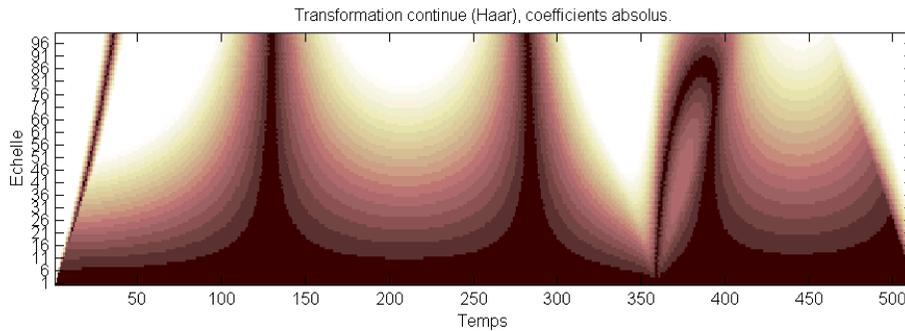
2 fréquences

La décomposition en ondelettes montre bien les différentes fréquences (les petits blocs correspondent aux fréquences les plus élevées).

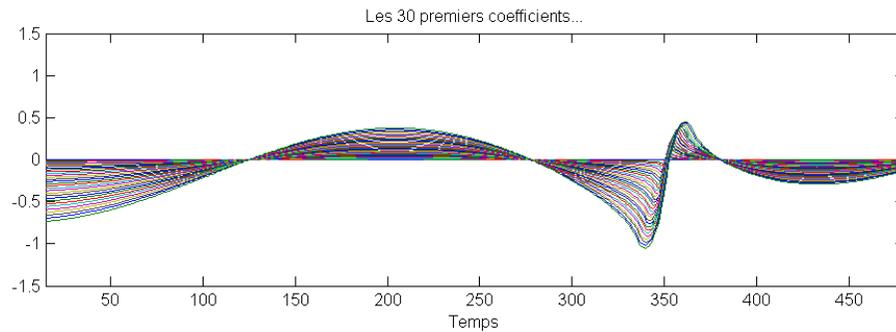
Exemple d'application (2)



$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



$$\tilde{x}(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \psi_a^*(b-t) dt = x * \psi_a^*$$



Théorème de l'échantillonnage (Shannon/ Nyquist)

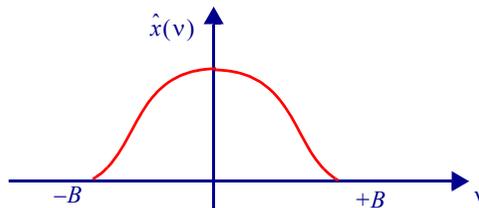
Un signal physique de type analogique a son amplitude qui varie continûment en fonction du temps. Échantillonner un signal analogique consiste à prélever des échantillons à des instants kT_e (cas de l'échantillonnage régulier).

La quantification consiste à associer une suite binaire à chaque échantillon. L'échantillonnage et la quantification sont des opérations effectuées lors de la Conversion Analogique Numérique (CAN).

La problématique de la théorie de l'échantillonnage est de connaître les conditions nécessaires pour reconstituer correctement le signal à partir de ses échantillons.

Considérons $x(t)$ dont la transformée de Fourier est $\hat{x}(v)$:

$$x(t) \leftrightarrow \hat{x}(v)$$



$\hat{x}(v)$ est nulle en dehors de $[-B,+B]$.

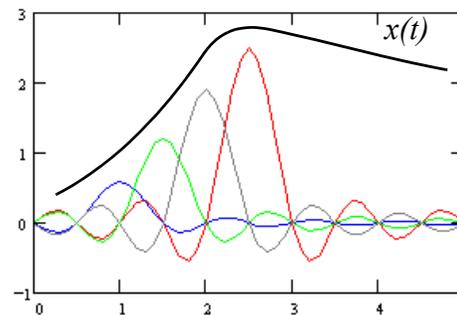
Si l'on connaît les échantillons : $x(0), x\left(\frac{1}{2B}\right), \dots, x\left(\frac{k}{2B}\right), \dots$

On peut reconstituer le signal $\hat{x}(t)$:

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x\left(\frac{k}{2B}\right) \Psi_k(t)$$

avec :

$$\Psi_k(t) = \frac{\sin\left[2\pi B\left(t - \frac{k}{2B}\right)\right]}{2\pi B\left(t - \frac{k}{2B}\right)}$$



Conséquences de l'échantillonnage

La transformée de *Fourier* du signal échantillonné :

$$\hat{x}_e(\nu) = \frac{1}{T_e} \cdot \hat{x}(\nu) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\nu - \frac{k}{T_e}\right)$$

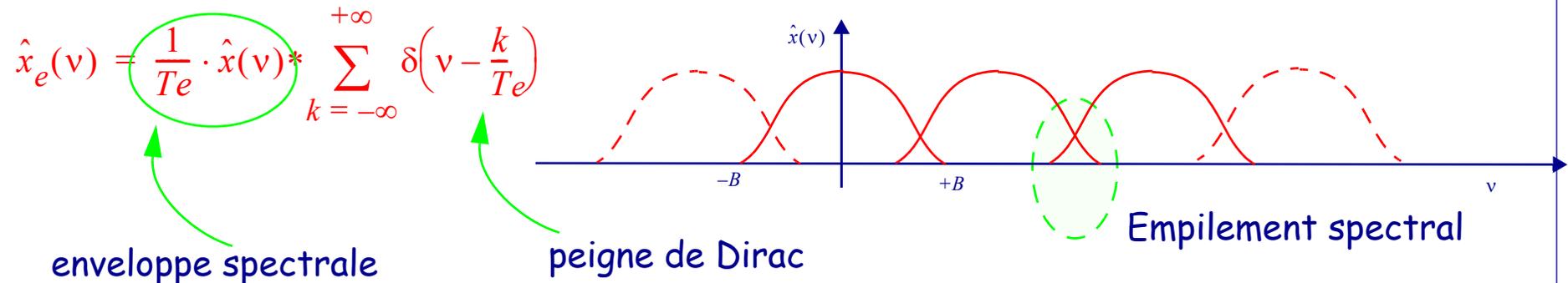
enveloppe spectrale

peigne de Dirac

Échantillonner dans l'espace temps revient à périodiser dans l'espace fréquence.

Deux cas sont possibles :

- Si $\nu_e < 2B$ il y a sous-échantillonnage avec un *recouvrement de spectre*. Ce phénomène est également appelé *repliement spectral* ou encore "*aliasing*".



-
-
-

Un signal sous-échantillonné apparaîtra comme ayant une fréquence inférieure à la réalité. Il existe plusieurs cas de figure, si l'on a affaire à un signal dont le spectre est étalé il y aura de l'empilement spectral. Si le signal a un spectre étroit (sinus par exemple) il y aura repliement spectral.

- Si $\nu_e \geq 2B$ l'échantillonnage du signal est correct et autorisera une interprétation cohérente des résultats. Il n'y a pas de recouvrement de spectre.

Le recouvrement spectral

$\hat{x}_e(\nu) = \frac{1}{T_e} \cdot \hat{x}(\nu) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\nu - \frac{k}{T_e}\right)$ explique bien le phénomène de l'échantillonnage. Le spectre de

base est décalé autour de la fréquence $\frac{k}{T_e} = k\nu_e$. Pour chaque fréquence du spectre $\pm\nu_0$, il existe une fréquence apparente :

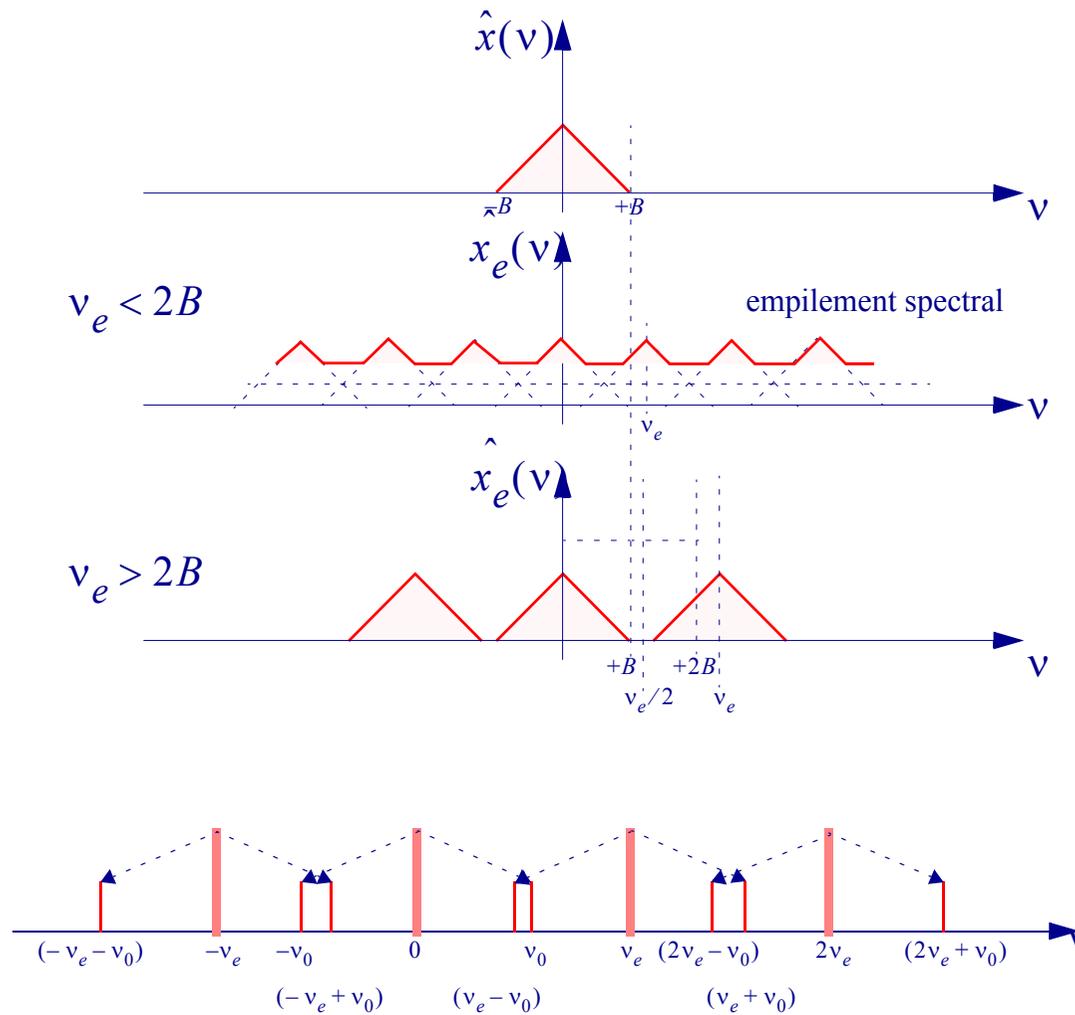
$$\nu_a = \pm\nu_0 \pm k\nu_e$$

avec $k \geq 0$.

Par exemple, pour $k = 0$, on obtient les 2 fréquences de base $-\nu_0$ et $+\nu_0$. Pour $k = 1$ on obtient les fréquences apparentes $(\nu_e - \nu_0)$ et $(\nu_e + \nu_0)$, etc.

La fréquence apparente la plus petite est donc $(\nu_e - \nu_0)$.

Cet effet est à rapprocher de l'effet stroboscopique.

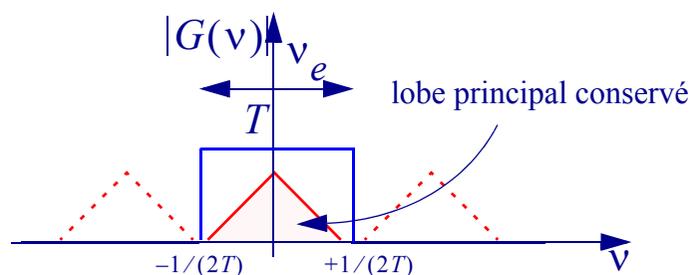


Filtre anti-repliement

Afin de reconstruire $x(t)$ à partir de $x_e(t)$, il est nécessaire de faire passer $x_e(t)$ dans un filtre passe bas idéal. Cette opération permet de ne conserver que le lobe principal de $x_e(t)$.

On utilise un filtre dont la fonction de transfert est : $G(v) = T \cdot \text{Rect}(v/v_e)$, T étant la période d'échantillonnage ($T = 1/v_e$). La transformée de *Fourier* de $G(v)$ est la réponse impulsionnelle

$h(t)$ du filtre passe-bas idéal. Il vient immédiatement que : $h(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$

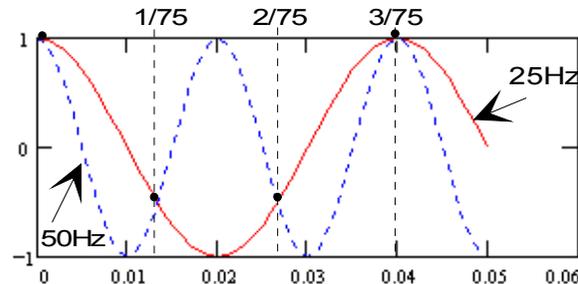


Exemple 1

On considère le signal $x(t) = 5 \cdot \cos 100\pi t$, afin d'éviter un repliement spectral, il est nécessaire d'échantillonner ce signal analogique de fréquence 50Hz à une fréquence minimale de 100Hz .

Si l'on échantillonne le signal à une fréquence de 75Hz .

Appliquons directement la relation $v_a = \pm v_0 \pm kv_e$: $v_a = v_e - v_0 = 75 - 50 = 25\text{Hz}$

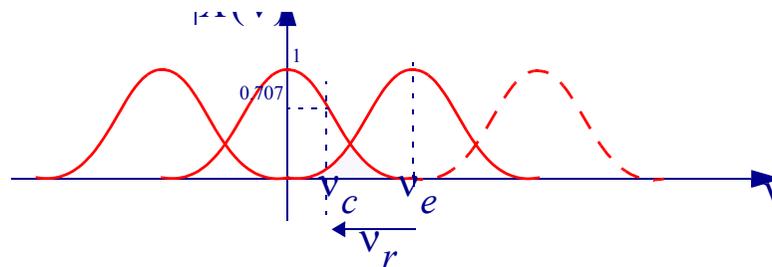


Les échantillons des cosinusoides à 25Hz et à 50Hz sont identiques, lorsque la fréquence d'échantillonnage est de 75Hz .

Exemple 2 : Il ne faut pas utiliser la Bande passante à -3dB comme fréquence haute !

Un filtre passe-bas du premier ordre est utilisé pour isoler le lobe principal.

$$|G(\nu)| = \frac{1}{[1 + (\nu/\nu_c)^2]^{1/2}}. \text{ Le spectre du signal résultant est périodisé.}$$



Comme $G(\nu)$ décroît lentement, il y a repliement spectral, les spectres sont sommés.

Supposons que $\nu_c = 10\text{KHz}$, déterminons ν_e qui donne un niveau de recouvrement de moins de

1%. Pour $\nu = \nu_c$, $|G(\nu)| = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,7071$

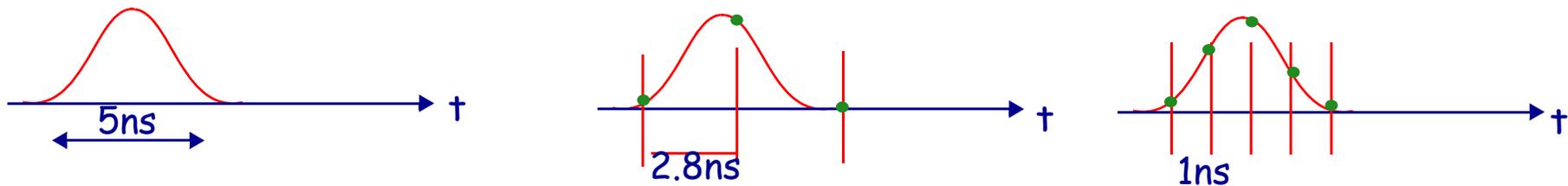
Il faut $0,7071 \times \frac{1}{100} < \frac{1}{[1 + (\nu_r/10)^2]^{1/2}}$ avec ν_r la fréquence de recouvrement.

On trouve que $\nu_r < 1414\text{KHz}$. La fréquence d'échantillonnage doit être : $\nu_e > \nu_c + \nu_r = 1424\text{KHz}$.

$$\nu_e \gg 2\nu_c$$

Cas des signaux non répétitifs

Considérons des signaux issus d'un détecteur :



$T_m \approx 2ns$ entre 10 et 90%

Si le système est du premier ordre $BP \times T_m = 0,35$ et $BP = 175MHz$

Si l'on applique le théorème de Shannon, il faudrait échantillonner à $2 \times BP = 350MHz$ soit un point toutes les $\frac{1}{350} = 2,8ns$ ce qui est très insuffisant pour reconstituer le signal.

En fait si l'on désire reconstituer correctement le signal il faudrait au moins 5 points, soit un point toutes les nano-secondes !

Les moments temporels, les relations de base

La transformée de Fourier d'un signal aléatoire est aléatoire.

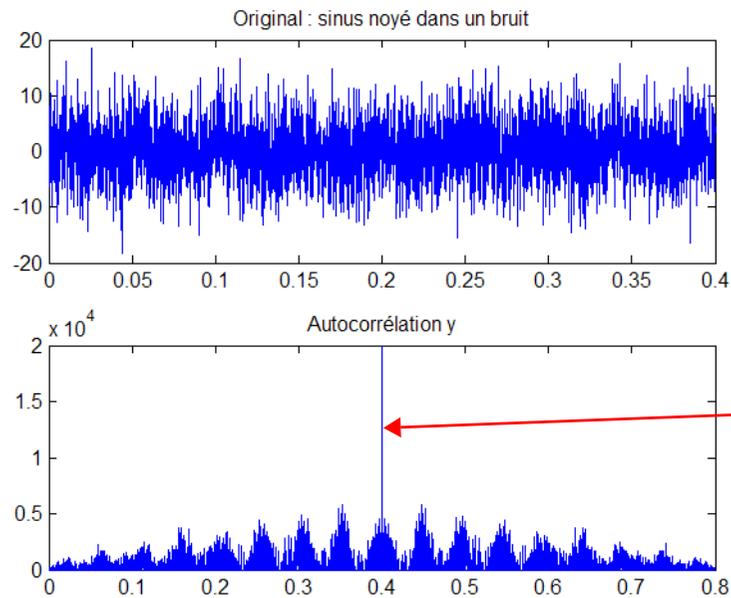
Seuls les paramètres statistiques (moments) permettent de caractériser les fonctions aléatoires :

Moyenne temporelle/Espérance mathématique (moment d'ordre 1)
Corrélation/Variance/Écart type (moment d'ordre 2)

Moyenne temporelle : $\overline{x(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) dt$

Auto-corrélation temporelle : $\overline{x(t) \cdot x(t + \tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \cdot x(t + \tau) dt$

Exemple : l'auto-corrélation permet de trouver un signal périodique noyé dans un bruit.



Pic de l'auto-corrélation du bruit

Les moments statistiques, les relations de base

Moyenne statistique

$$m_x(t) = E[X(t)] = \int_R xp(x, t)dx$$

$p(x, t)$ est la densité de probabilité de la variable aléatoire $X(t)$.

C'est l'espérance mathématique. de $X(t)$

Moment d'ordre 2

$$E[X^2(t)] = \int_R x^2 p(x, t)dx$$

C'est l'espérance mathématique. de $X^2(t)$

On n'explicite rarement l'intégrale, on travaille souvent avec l'opérateur E (beaucoup plus simple)

Fonction de corrélation

Fonction d'auto-corrélation

C'est l'espérance mathématique d'un produit

$$R_{xy}[t_1, t_2] = E[X(t_1) \cdot X(t_2)]$$

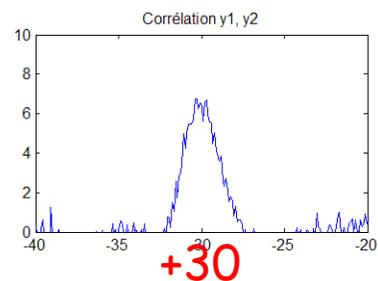
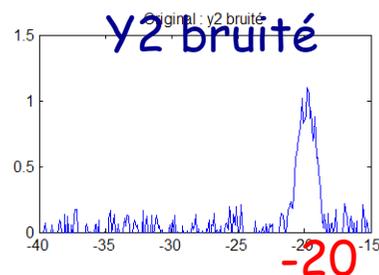
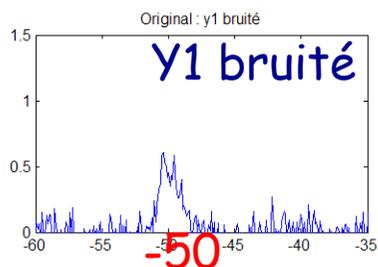
Fonction d'inter-corrélation

C'est l'espérance mathématique d'un produit

$$R_{xy}[t_1, t_2] = E[X(t_1) \cdot Y(t_2)]$$

Exemple

L'inter-corrélation permet de trouver une corrélation entre $y_1(t)$ et $y_2(t)$: 2 signaux bruités



exemple de corrélation entre y_1 et y_2

Stationnarité

Un processus aléatoire est stationnaire si ses propriétés statistiques sont invariantes pour tout changement de l'origine des temps.

Les signaux stationnaires sont beaucoup plus délicats à traiter !

Suite aléatoire stationnaire au second ordre

Propriétés

- $E(X_n)$ est indépendant de n .
- $E(|X_n|^2) < +\infty$ est indépendant de n .
- $R_{xx}(n_1, n_2) = E[X(n_1) \cdot X^*(n_2)]$ est uniquement fonction de $\tau = n_1 - n_2$.

Processus aléatoire stationnaire au second ordre

Propriétés

- $E(X(t))$ est indépendant de t .
- $E(|X(t)|^2) < +\infty$ est indépendant de t .
- $R_{xx}(t_1, t_2) = E[X(t_1) \cdot X^*(t_2)]$ est uniquement fonction de $\tau = t_1 - t_2$.

$$R_{xx}(t_1, t_2) = R_{xx}(t, \tau) = E[X(t + \tau) \cdot X^*(t)]$$

Ou encore :

$$R_{xx}(t, \tau) = E[X(t) \cdot X^*(t - \tau)]$$

Pour $\tau = 0$, on obtient le moment d'ordre 2 :

$$R_{xx}(t, 0) = E[|X(t)|^2] = \sigma_t^2$$

Ergodicité (1)

L'équation $m_x(t) = E[X(t)] = \int_R xp(x, t)dx$ explicite l'espérance mathématique E comme une moyenne d'ensemble, soit l'intégrale de toutes les valeurs de X pondérées par la densité de probabilité de la variable aléatoire.

On peut essayer d'estimer la quantité $E[X(t)]$ ce qui suppose qu'à l'instant t_1 l'on dispose de toutes les réalisations de la variable aléatoire, malgré la difficulté d'une telle expérience, on peut imaginer, par exemple, une batterie de n capteurs.

Ergodicité (2)

Dans le cas de n capteurs, une estimation de la moyenne d'ensemble peut être donnée par la relation suivante :

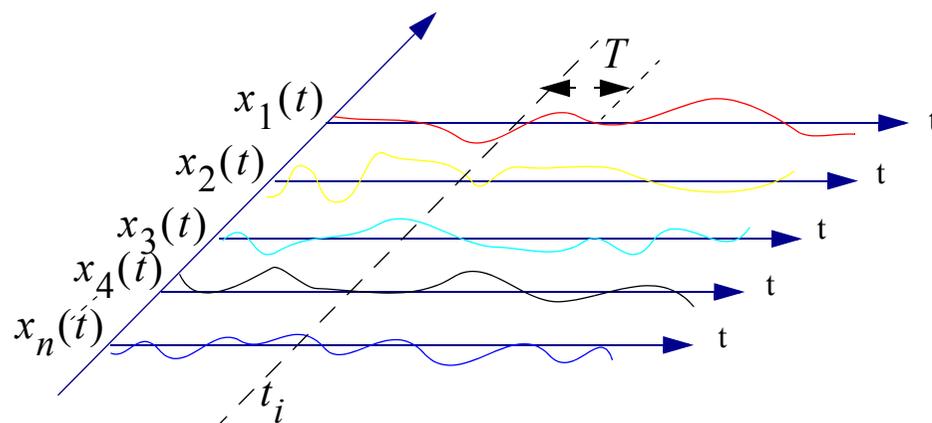
$$m_X(t) = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n x_p(t)$$

Généralement, on ne dispose que d'une réalisation de la variable aléatoire et l'on est tenté d'estimer la moyenne d'ensemble par la moyenne temporelle $\overline{x(t_i)} = \frac{1}{T} \int_{t_i}^{t_i+T} x(t) dt$.

La fonction aléatoire est ergodique à l'ordre 1 (moyenne) si :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \overline{x(t_i)} = m_X \quad \forall t_i$$

Ergodicité (2)



Un processus aléatoire est **ergodique** à l'ordre n , si les moyennes temporelles jusqu'à l'ordre n sont indépendantes du choix de la réalisation. De plus, si les résultats obtenus à partir des moyennes statistiques sont équivalents à ceux obtenus à partir des moyennes temporelles, alors **le processus est ergodique**.

Propriétés spectrales

La transformée de *Fourier* donne de bonnes indications sur la répartition spectrale d'un signal déterministe. Par contre **la transformée de *Fourier* d'un signal aléatoire est un spectre aléatoire**. Un seul spectre n'est pas suffisant pour rendre compte des propriétés du signal.

Il est nécessaire d'utiliser les **propriétés statistiques** (moyenne, écart type, corrélation) qui ont des caractéristiques bien définies. On supposera par la suite que les signaux sont stationnaires et ergodiques.

Pour analyser la répartition spectrale des signaux aléatoires, on introduit la notion de **densité spectrale (d'énergie ou de puissance)**.

Selon que l'on a affaire à des signaux d'énergie finie, on parlera de **densité spectrale d'énergie** ou de **densité spectrale de puissance** pour les signaux de puissance moyenne finie.

Notions de base

Théorème de Parseval :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(v)|^2 dv = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

Puissance d'un signal sur l'intervalle T :

$$P_x = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} |x(v)|^2 dv = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

$$P_x = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} |x(v)|^2 dv = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(v) dv \text{ dans ce cas } \gamma(v) = \frac{1}{T} |x(v)|^2 \text{ est le périodogramme}$$

Unités

P_x est une puissance qui s'exprime en (W ou A^2 ou V^2 ...)

$\gamma(v)$ est une densité spectrale de puissance qui s'exprime en $[(W \text{ ou } A^2 \text{ ou } V^2 \dots) \cdot Hz^{-1}]$

C'est une puissance par unité de Hertz.

On peut utiliser des valeurs RMS (Root Mean Square) ou efficaces :

$$Val_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} |x(v)|^2 dv} \text{ qui s'exprime en } \left[\left(W^{\frac{1}{2}} \text{ ou A ou V...} \right) \cdot Hz^{-2} \right]$$

La densité spectrale de puissance (1)

La transformée de Fourier donne de bonnes indications sur la répartition spectrale d'un signal déterministe.

Pour un signal aléatoire, un seul spectre n'est pas suffisant.

La relation $\gamma(\nu) = \frac{1}{T}|x(\nu)|^2$ correspond à un spectre instantané !
 $\gamma(\nu) \geq 0$

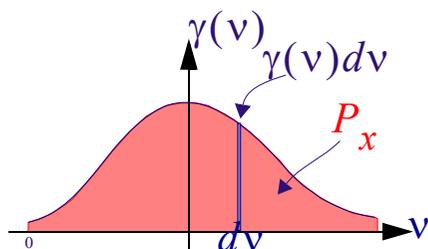
Il faut moyenner les spectres ou utiliser les propriétés statistiques qui sont bien définies.
 $\gamma(\nu)d\nu =$ puissance moyenne dans la bande de fréquence $[\nu, \nu + d\nu]$
 P_x est dans ce cas la puissance du signal.

La densité spectrale de puissance (2)

Transformée de *Fourier* de la fonction de corrélation $R(\tau)$: *théorème de Wiener-Kinchine*.

$$R(\tau) = E[x(t)x(t-\tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(\nu) e^{2\pi i \nu \tau} d\nu$$

$\gamma(\nu) d\nu$ = puissance moyenne dans la bande de fréquence $[\nu, \nu + d\nu]$



$$[(W \text{ ou } A^2 \text{ ou } V^2 \dots) \cdot Hz^{-1}]$$

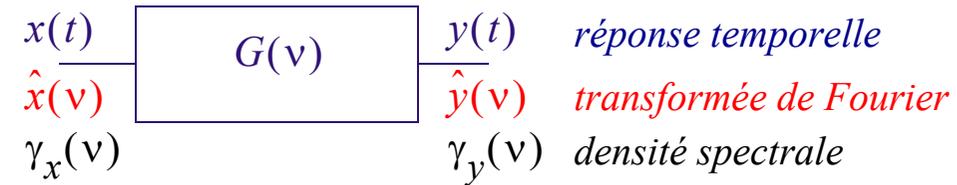
$$R(0) = P_x = \sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(\nu) d\nu$$

$$[(W \text{ ou } A^2 \text{ ou } V^2 \dots)]$$



La densité spectrale de puissance (3)

Considérons le filtre :



Soit :

$\gamma_x(\nu)$ est la densité spectrale de $x(t)$.

$\gamma_y(\nu)$ est la densité spectrale de $y(t)$

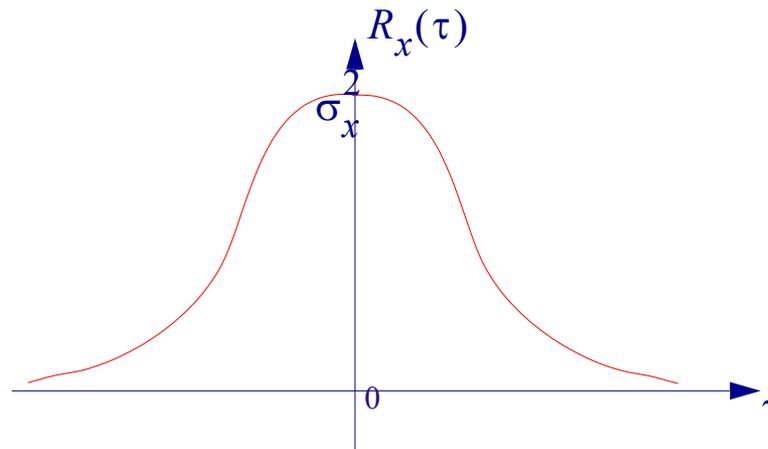
Alors, $\gamma_x(\nu)$ et $\gamma_y(\nu)$ sont reliées par la relation suivante :

$$\gamma_y(\nu) = \gamma_x(\nu) \cdot |G(\nu)|^2$$

Propriétés de la fonction de corrélation

La définition de la fonction de corrélation est donnée par : $R_x(\tau) = E[X(t) \cdot X^*(t - \tau)]$

- $R_x(\tau) = R_x^*(-\tau)$ et pour une fonction réelle : $R_x(\tau) = R_x(-\tau)$
- $|R_x(\tau)| < R_x(0)$
- $R_x(\pm\infty) = 0$
- $R_x(0) = \sigma_x^2$

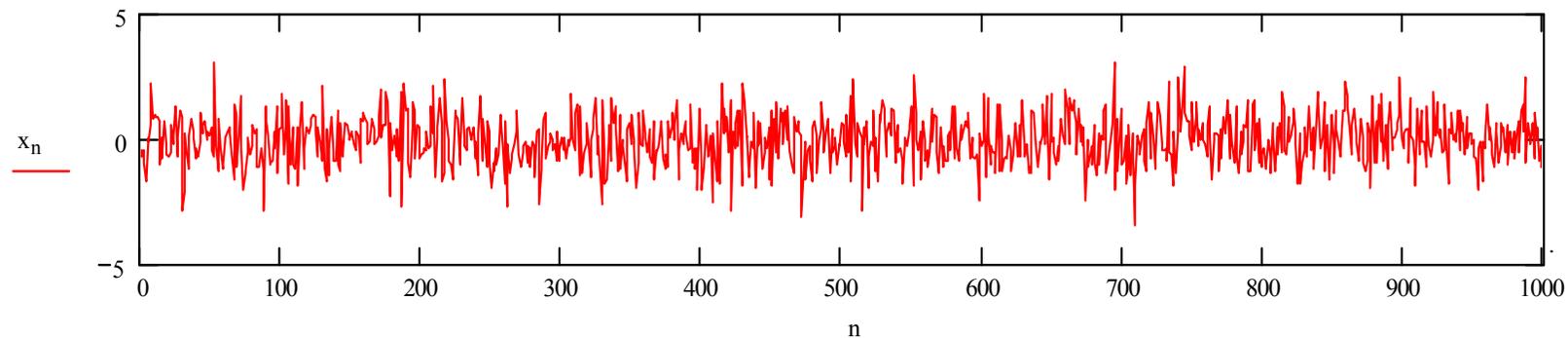


Le bruit

Les signaux sont transmis ou traités par des voies qui les altèrent.

Tout ce qui modifie le signal utile peut être considéré comme du **bruit**.

Les sources de bruit ont généralement un **caractère aléatoire**, c'est pourquoi ces phénomènes sont étudiés par des méthodes statistiques.

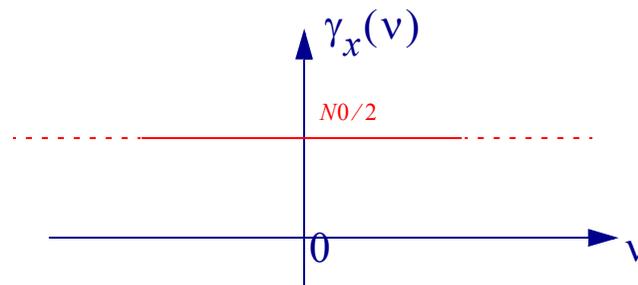


Le bruit blanc (1)

Définition : Une fonction aléatoire $X(t)$ est appelée "bruit blanc" si :

- $X(t)$ est stationnaire au deuxième ordre
- $E[X(t)] = 0$
- $\gamma_x(\nu) = \frac{N_0}{2} \quad \forall \nu$

La puissance moyenne du bruit blanc est infinie.



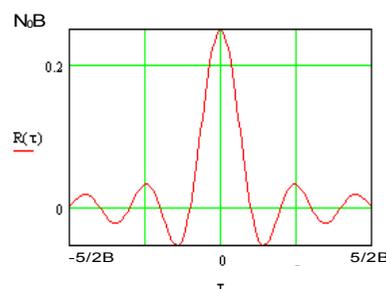
Le bruit blanc (2)

Si l'on fait passer le bruit blanc dans un filtre passe bas de bande passante $(-B, +B)$, on se ramène à un bruit de puissance moyenne finie.



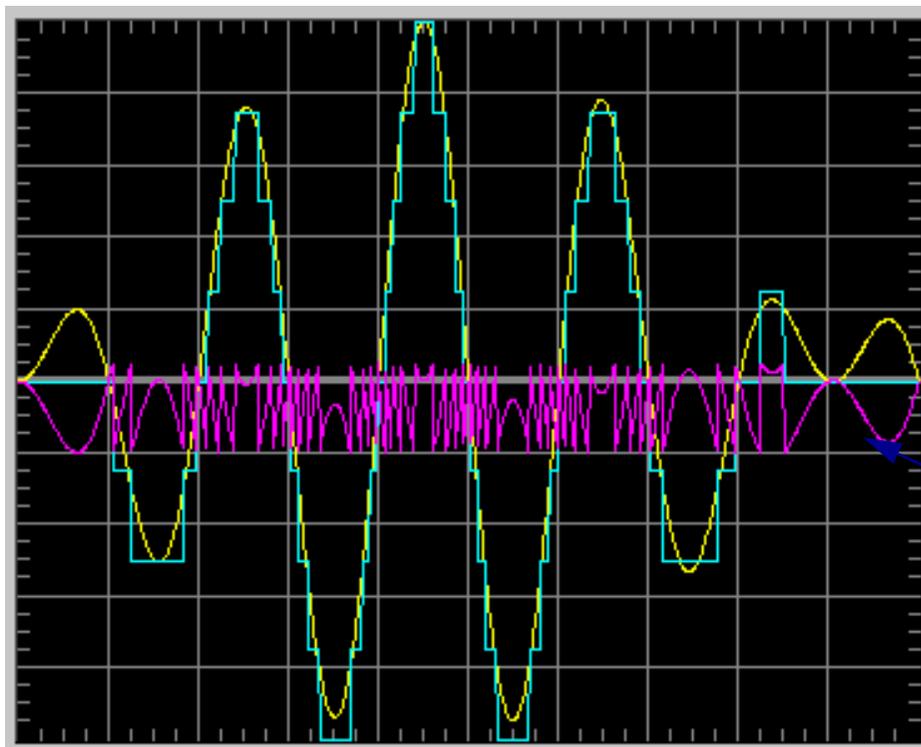
Dans ce cas, la fonction d'auto-corrélation a pour valeur : $R(\tau) = N_0 B \text{sinc}(2\pi B\tau)$

$$R(0) = N_0 B$$



La fonction de corrélation du bruit blanc

Le bruit de quantification (1)



Quantifier une valeur analogique x_n , c'est remplacer cette valeur par y_n qui fait partie d'un ensemble dénombrable de valeurs discrètes.

Le pas de quantification : $q = \frac{A_{max}}{2^N}$ avec N le nombre de bits du codeur.

Le bruit de quantification (2)

On suppose que l'erreur ε_n est uniformément répartie.

ε_n est une variable aléatoire de moyenne nulle $E[\varepsilon_n] = 0$ obéissant à une loi de probabilité uniforme :

$$\forall n \quad p_{\varepsilon_n}(u) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si } \frac{q}{2} \leq u < \frac{q}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La variance s'exprime par la relation : $\sigma^2 = \frac{1}{q} \int_{-q/2}^{+q/2} u^2 du = \frac{q^2}{12}$

Ceci correspond à la **puissance du bruit de quantification** (On suppose le processus ergodique, la moyenne quadratique est équivalente à une puissance).

Amélioration du rapport signal à bruit (1)

La puissance du bruit de quantification est uniformément distribuée et ne dépend pas de la fréquence d'échantillonnage du convertisseur analogique-numérique.

Rappel :

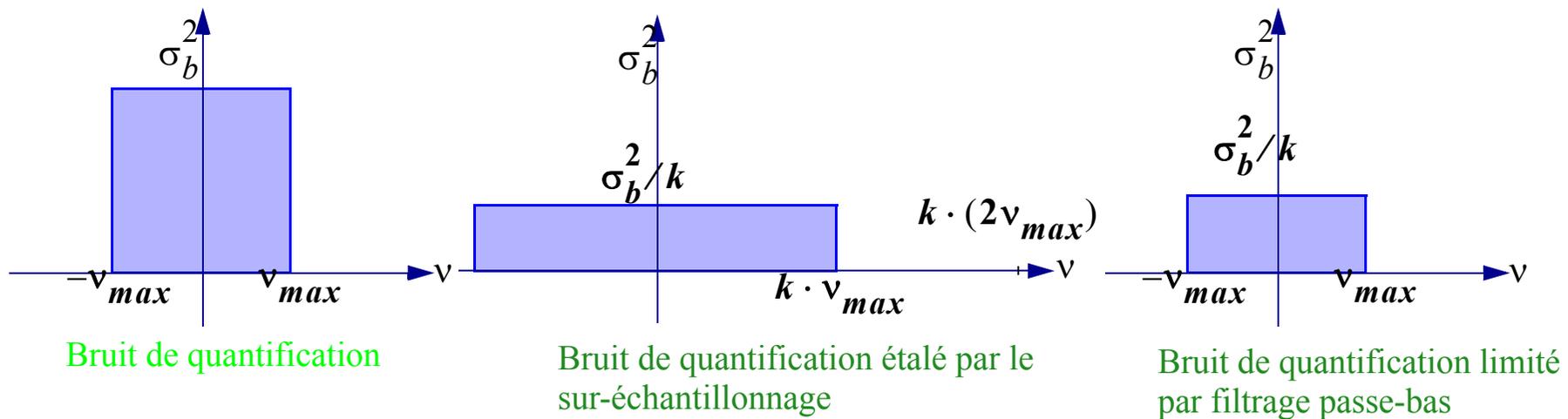
Il est nécessaire d'échantillonner le signal d'entrée avec $v_e \geq 2 \cdot v_{max}$, v_{max} (*Shannon*).

Un filtre passe-bas est nécessaire pour éliminer toutes les fréquences supérieures à v_{max} générées par l'échantillonnage.

Amélioration du rapport signal à bruit (2)

Considérons que l'on sur-échantillonne le signal d'entrée avec une fréquence $k \times v_e$, telle que :

$$v_e = 2 \times v_{max}$$



Si l'on échantillonne à la fréquence $k \cdot (2v_{max})$, avec $k = 1$, on retrouve la limite donnée par **Shannon**. Si l'on augmente k , la puissance du bruit est répartie sur toute la bande. Dans ce cas, le filtrage passe-bas, limite la puissance du bruit à la zone hachurée de la figure 3.

Amélioration du rapport signal à bruit (3)

Pour un signal sinusoïdal, Si l'on tient compte du facteur k :

$$\left(\frac{S}{B}\right)_{dB} = 6N + 1,8 + 10 \cdot \log_{10}(k)$$

Pour un rapport signal à bruit donné, le sur-échantillonnage améliore le nombre de bits effectifs de la quantité : $\frac{10}{6} \cdot \log_{10}(k)$.

k	Amélioration (S/B) en dB	Amélioration du nombre de bits
2	3	0.5
4	6	1
8	9	1.5
16	12	2
32	15	2.5
64	18	3

Le bruit thermique (ou bruit *Johnson*) (1)

Le bruit thermique = agitation thermique des électrons libres dans les matériaux. Présent dans tous les composants actifs ou passifs présentant une résistance R .

La densité spectrale du bruit thermique est décrite par :

$$\gamma_{th}(v) = \frac{1}{2} \cdot \frac{h \cdot |v|}{e^{(h \cdot |v| / (kT))} - 1} \quad W \cdot Hz^{-1}$$

$$h \text{ (Planck)} : 6,62 \times 10^{-34} \quad J \cdot s, \quad k \text{ (Boltzmann)} : 1,38 \times 10^{-23} \quad J \cdot K^{-1} \text{ (Joule.degré}^{-1}\text{)}$$

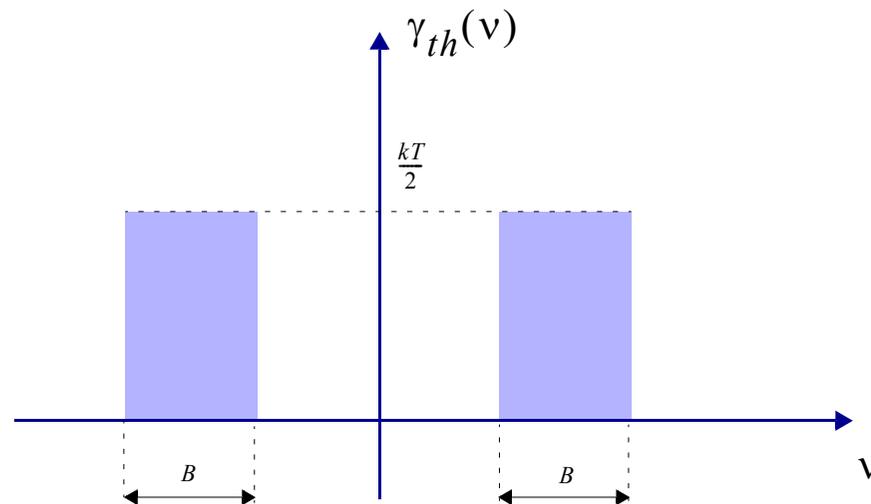
Si l'on considère que les fréquences $|v| < 1000 \text{ GHz}$, la densité spectrale du bruit thermique se simplifie :

$$\gamma_{th}(v) = \frac{1}{2} kT$$

Le bruit thermique (ou bruit *Johnson*) (2)

Si $\gamma_{th}(v) = \frac{1}{2}kT$: le bruit thermique est un bruit blanc.

Par exemple, la puissance totale de ce bruit dans une bande de fréquence B est : $P_{th} = kTB$

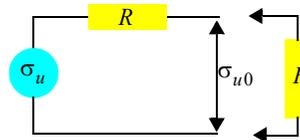


Fluctuations de tension et de courant dans une résistance (1)

Dans toute bande de fréquences B , une résistance à la température T est une source de tension de bruit. La valeur moyenne quadratique de cette tension est :

$$\sigma_u^2 = 4kTRB \quad (V^2)$$

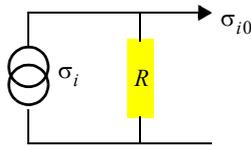
et : $\gamma_u(v) = 2kTR$



Fluctuations de tension et de courant dans une résistance (2)

La résistance R peut être assimilée à une source de courant de bruit dont la valeur moyenne quadratique est :

$$\sigma_i^2 = \frac{4kTB}{R} \quad (A^2)$$

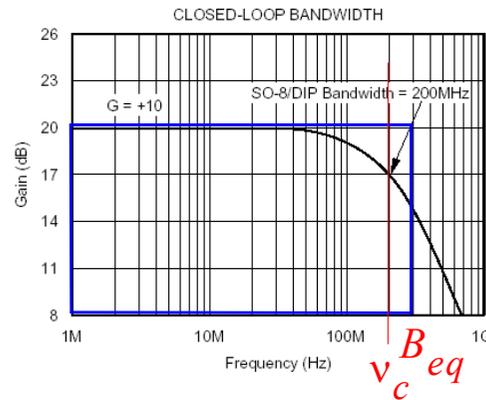


avec : $\gamma_u(v) = 2kTR(v)$

Remarque : La distribution statistique du bruit thermique est gaussienne.

Bande équivalente de bruit (1)

Si l'on compare la puissance de bruit du circuit RC (premier ordre) à celle de la résistance R , on peut définir une bande équivalente de bruit :



$$B_{eq} = \frac{1}{4RC} = \frac{\pi}{2} v_c$$

D'une manière plus générale, la notion de bande équivalente de bruit permet de calculer simplement la puissance du bruit après filtrage.

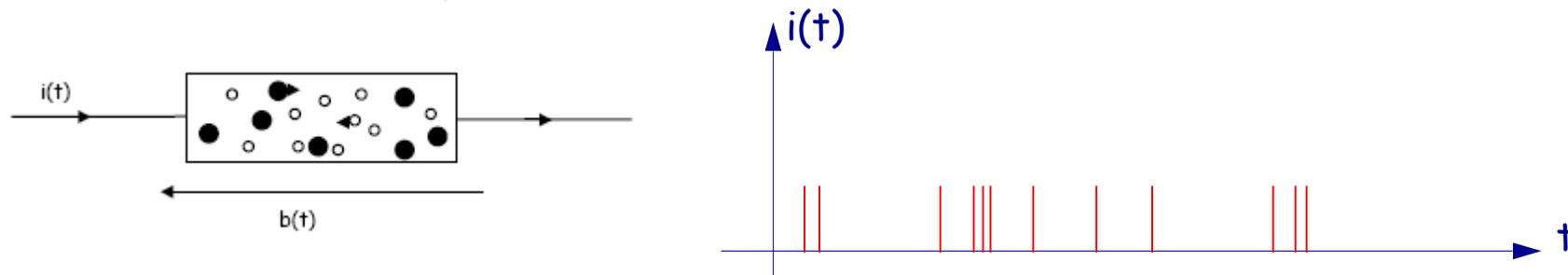
Bruit de grenaille (Bruit *Schottky* ou "shot noise")

Ce bruit correspond aux fluctuations statistiques du nombre de porteurs de charge qui participent à la création d'un courant (cas des diodes et des transistors par exemple).

Ce bruit est généralement modélisé par une loi de *Poisson*. (instants de réalisation aléatoires).

Le bruit de grenaille se superpose au courant moyen créé. La théorie de ce bruit est à la base de l'étude :

- des bruits liés à l'émission d'une électrode ou encore,
- des fluctuations des temps de transit.



Expression du bruit de grenaille (1)

Le bruit de grenaille peut être considéré comme un bruit impulsionnel et se mettre sous la forme :

$$i(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e\delta(t-t_k)$$

avec : e la charge de l'électron = $1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$

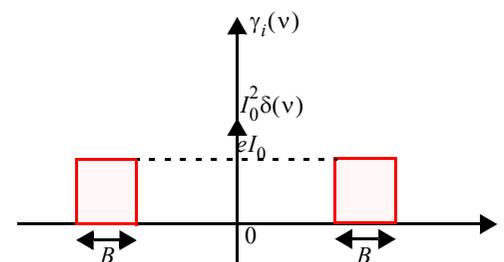
Expression du bruit de grenaille (2)

d

$$e\lambda = I_0 = \text{courant moyen}$$

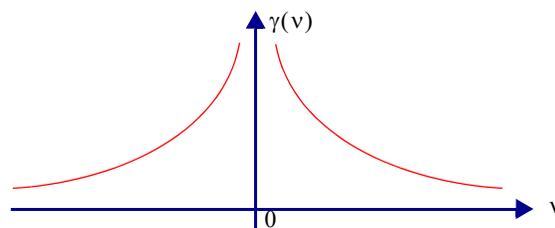
$$\gamma_i(\nu) = \underbrace{I_0^2 \delta(\nu)}_{\text{distribution spectrale de la composante continue}} + \underbrace{eI_0}_{\text{fluctuations par effet de grenaille}}$$

$$\sigma_i^2 = 2 \int_0^B eI_0 d\nu = 2eI_0B$$



Autres sources de bruits (exemple : le bruit en $1/f$)

Ce bruit est essentiellement basse fréquence, c'est le cas du bruit de scintillation par exemple ("flicker noise"). Ce bruit est présent dans tous les composants (actifs et passifs) et correspond aux captures de porteurs associés à des défauts ou à la contamination par exemple. Une des caractéristique de ce bruit est son universalité, on le retrouve dans une multitude de domaines comme : en biologie (taux d'insuline d'un diabétique), le débit du Nil, les variations saisonnière de température ou encore le trafic routier.



La densité spectrale de puissance du bruit en $1/f$ est donnée par :

$$\gamma(v) = k \frac{v_0}{|v|^\alpha} \quad 0 < \alpha < 2$$

Le bruit en $1/f$ est généralement gaussien et stationnaire.

Exemples

Bruit thermique

Un chiffre utile à retenir : $4kT$ à la température ambiante = $1,66 \times 10^{-20}$

La valeur moyenne quadratique de la tension de bruit d'une résistance de $1K\Omega$ à la température ambiante est de :

$$\sigma_v^2 = \bar{v}^2 = 16 \cdot 10^{-18} \quad V^2 \cdot Hz^{-1}$$

$$\bar{v} = 4nV / \sqrt{Hz} \text{ (RMS)}$$

Bruit Schottky

Quel est la valeur du courant quadratique moyen de bruit dans une diode parcourue par un courant de $1mA$ si la bande passante est de $1MHz$?

$$\sigma_i^2 = \bar{i}^2 = 2qI_d B = 2 \times 1,6 \times 10^{-19} \times 10^{-3} \times 10^6 = 3,2 \times 10^{-16} A^2$$

$$\bar{i} = 18nA \text{ (RMS)}$$

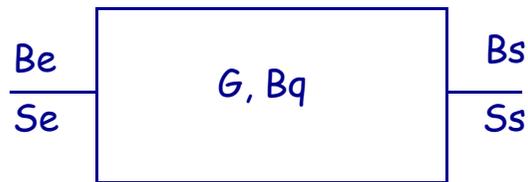
Le facteur de bruit (1)

Si Q est un amplificateur idéal de gain en puissance G : $\frac{S_e}{B_e} = \frac{S_s}{B_s}$:

Le rapport signal à bruit en sortie est égal au rapport signal à bruit en entrée.

Le quadripôle n'étant pas parfait, il génère du bruit par le biais de ses composants (résistances, transistors, etc.).

Par conséquent : $\frac{S_e}{B_e} > \frac{S_s}{B_s}$



Le facteur de bruit F (2)

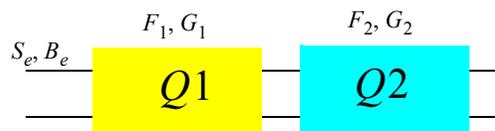
$$F = \frac{S_e/B_e}{S_s/B_s}$$

$$F = \frac{\text{rapport signal à bruit en entrée}}{\text{rapport signal à bruit en sortie}}$$



Le facteur de bruit (3), Cas de quadripôles en cascades

Soit deux quadripôles :



$$F = F_1 + \frac{(F_2 - 1)}{G_1}$$

En généralisant à n quadripôles :

$$F = F_1 + \frac{(F_2 - 1)}{G_1} + \frac{(F_3 - 1)}{G_1 G_2} + \dots + \frac{(F_n - 1)}{G_1 G_2 \dots G_{n-1}}$$

Remarque : Il est important de noter que seuls les bruits des premiers étages sont significatifs. Si le gain G_1 du premier étage est important, on peut généralement négliger les bruits des autres étages. Dans ce cas, il suffit uniquement d'optimiser les caractéristiques en bruit du premier étage.